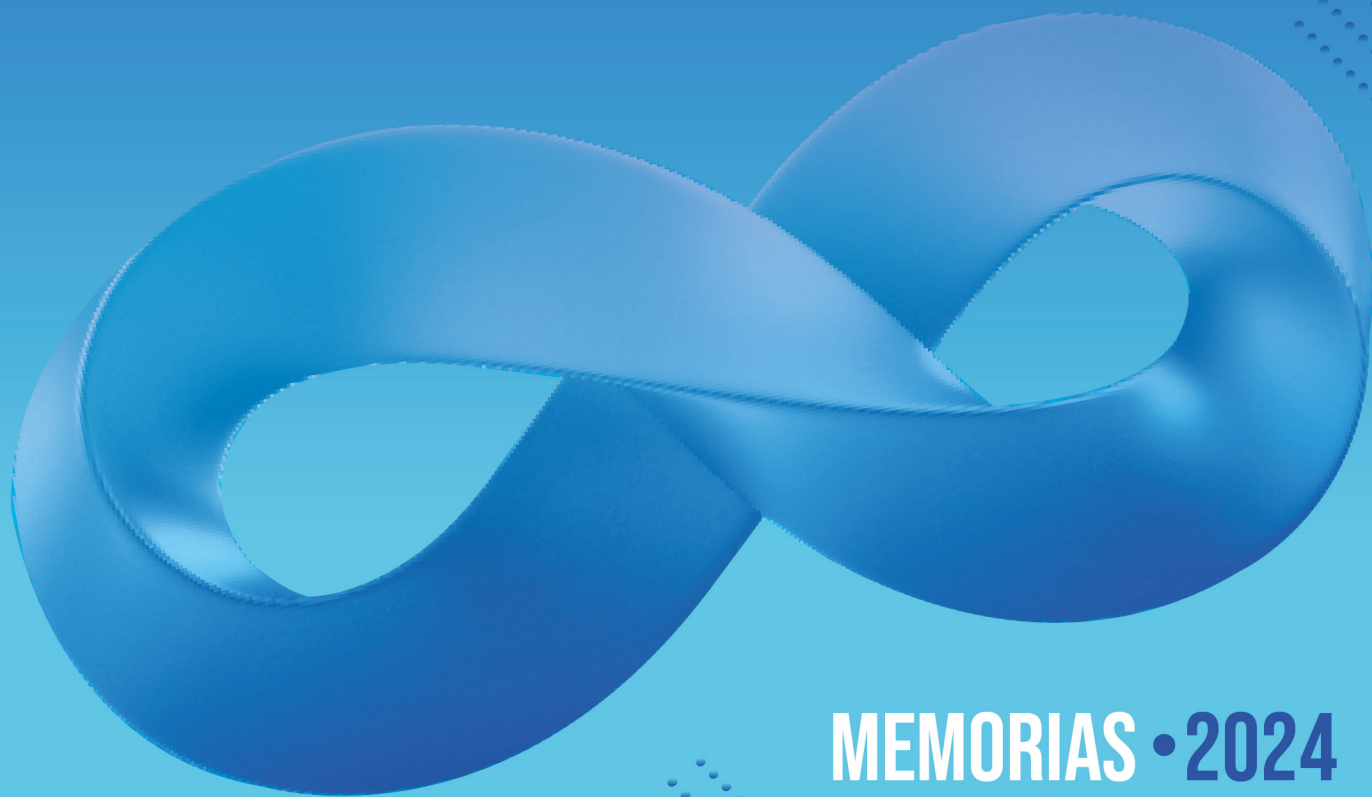




V ENCUENTRO
MATEMÁTICO
DEL • CARIBE



MEMORIAS • 2024



Universidad Tecnológica de Bolívar



V ENCUENTRO
MATEMÁTICO
DEL • CARIBE



MEMORIAS • 2024



Universidad Tecnológica de Bolívar

COMITÉ ORGANIZADOR

Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo - Universidad Tecnológica de Bolívar

Andrea Estefanía Cabarcas Sánchez - Universidad Tecnológica de Bolívar

COMITÉ CIENTÍFICO

Andy Rafael Domínguez Monterroza - Universidad Tecnológica de Bolívar

Carlos Rafael Payares Guevara - Universidad Tecnológica de Bolívar

Catalina María Rúa Álvarez - Universidad de Nariño

Elkin Oveimar Quintero Vanegas - Universidade Federal do Amazonas

German Alonso Benitez Monsalve - Universidade Federal do Amazonas

Héctor Edonis Pinedo Tapia - Universidad Industrial de Santander

Juan Carlos Galvis Arrieta - Universidad Nacional de Colombia

Marlon Michael López Flóres - Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Mikhail Malakhaltsev - Universidad de los Andes

RECTOR

Alberto Roa Varelo

VICERRECTOR ACADÉMICO

Andrés Guillermo Marrugo Hernández

VICERRECTORA ADMINISTRATIVA

María del Rosario Gutiérrez de Piñeres Perdomo

SECRETARIA GENERAL

Ana María Horrillo Caraballo

DECANA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Lenny Alexandra Romero Perez

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y EMPRENDIMIENTO

Jairo Useche Vivero

DIAGRAMACIÓN

Ediciones UTB

COMPILADOR DE MEMORIAS

Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

ISSN: 2744-8835

Cartagena de Indias, D. T. y C., - Colombia

www.utb.edu.co

2024



Universidad
Tecnológica
de Bolívar
EDITORIAL UTB

Prefacio

El Encuentro Matemático del Caribe ([Página Web](#)) tiene como finalidad reflexionar sobre el quehacer matemático y la enseñanza de las Matemáticas en el Caribe colombiano. Así mismo, extender las redes académicas con investigadores locales, nacionales e internacionales en las Ciencias Matemáticas. A través del encuentro se busca motivar a la comunidad de nuestra región a participar activamente en eventos matemáticos para conocer de primera mano la evolución y el amplio alcance que posee esta ciencia a nivel mundial por cuenta de los expositores.

La quinta versión del Encuentro Matemático del Caribe se realizó de forma presencial del 2 al 5 de julio de 2024 en la Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena – Colombia. En el mismo, se presentaron 43 conferencias, 7 pósteres y 4 minicursos, abarcando las diferentes áreas de las Matemáticas.

En estas memorias presentaremos los resúmenes de las conferencias, pósteres y minicursos que se impartieron durante el V Encuentro Matemático del Caribe. Primero encontraremos las conferencias, las cuales están organizadas por áreas: Matemática aplicada (9 conferencias), Teoría de grafos (3 conferencias), Sistemas Dinámicos (3 conferencias), Análisis (8 conferencias), Álgebra (5 conferencias), Geometría (2 conferencias), Educación Matemática (9 conferencias), Ecuaciones Diferenciales (4 conferencias): Finalmente encontraremos los minicursos impartidos y los pósteres presentados.

El comité organizador reitera su agradecimiento a los participantes del evento, al comité científico y al público asistente.

AGRADECIMIENTOS

Facultad de Ciencias Básicas - Universidad Tecnológica de Bolívar

Departamento de compras - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Comunicaciones - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Audiovisuales - Universidad Tecnológica de Bolívar

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

Índice de conferencias y minicursos

Matemática aplicada

- El uso de la transformada RICC para la clasificación
y agrupación de imágenes y señales 12
– Evguenii Kourmychev
- Introducción al modelado matemático de la matriz agroecológica 13
– N. Leticia Abrica-Jacinto, Eugenio Azpeitia, Verónica Zepeda, Mariana Benítez
- Application of an adaptive Bayes factors
to balanced ANOVA models 14
– Daiver De Jesús Vélez Ramos
- Modelado de parámetros de calidad
del agua con redes complejas 16
– Mónica Jhoana Mesa Mazo, Jorge Mario García Usuga,
César Augusto Acosta Minoli
- Múltiples ciclos límite en un modelo
de depredación del tipo Leslie 19
– Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo
- Modelo matemático para la dinámica de la infección por VIH en una
población con estructura de edad y condiciones de riesgo asociadas 20
– Francisco Andrés Betancourt-Arteaga, Hernán Darío Toro-Zapata,
Jorge Mario García-Usuga
- Explorando fronteras: dinámicas antipodales y estabilidad
en sistemas esféricos conformes de 2, n -cuerpos 23
– Ruben Dario Ortiz Ortiz
- Caracterización de series temporales de rayos
cósmicos a largo plazo de curvatura geométrica de redes 24
– D. Sierra-Porta
- Ciencia de datos y actividad física 25
– Oscar Eduardo Martínez

Teoría de Grafos

- On the Harary Laplacian-energy-like 27
– Luis Medina Caamaño
- On the Estrada Index of Graphene Graph 29
– Jonnathan Alexander Rodriguez Zambrano
- On spectral invariants of the α -mixed adjacency matrix 30
– Eber Javier Lenés Puello

Sistemas Dinámicos

- Homeomorfismos con dimension de Hausdorff
media maximal son genéricos 35
– Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo
- Sombreamiento para operadores de composición
sobre un espacio de Hardy-Hilbert 37
– Carlos Fabian Álvarez Escorcía
- Sobre la continuidad de los atractores
de sistemas dinámicos 39
– Jorge Armando Reyes Vásquez

Análisis

- Análisis de Fourier e integración generalizada:
el caso de dos teoremas fundamentales 41
– Francisco J. Mendoza Torres
- The New Fractal derivative, some results
integro-differential equations and applications 42
– Miguel Vivas-Cortez
- Operadores estrictamente singulares
y estrictamente cosingulares 43
– Margot Salas-Brown
- Operador tridiagonal entre espacios
de sucesiones con pesos 44
– Julio C. Ramos Fernández
- A recent review on fractional difference
equations and (N, λ) -periodic functions 45
– Stiven Díaz
- Espacios L_p y transformada de Laplace 47
– Héctor Camilo Chaparro
- Compacidad del operador de Rhalý
en espacios de sucesiones 48
– Helen Lorena Quevedo Enciso, Julio C. Ramos Fernández
- El problema de Cauchy sobre Adeles finitos 49
– Julian A. Garnica

Álgebra

- Conjuntos Sidon bidimensionales y modelos de sincronización 51
– Carlos Alberto Trujillo Solarte

Noncommutative differential geometry of quantum planes – Andrés Alejandro Rubiano Suárez, Milton Armando Reyes Villamil	52
Grupos cuánticos y sus acciones – Fabio Calderón	54
Descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p de Grupos Pro- p – Jesus E. Berdugo	55
On simple Lie algebra in characteristic 2 – Carlos Rafael Payares Guevara	58
Identidades minimales para subespacios del álgebra de Weyl – Carlos Arturo Rodríguez Palma	59

Geometría

Geometría de superficies dadas implícitamente en el haz de marcos ortonormales con la métrica de levantamiento de Wagner – Edward S. Becerra, Mikhail Malakhaltsev, Haimer A. Trejos	61
Existence of bifurcation branches of free boundary CMC hypersurfaces – Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas	62

Educación Matemática

Estudio correlacional entre el cursomatemática elemental y el curso matemática general del Instituto Tecnológico de Costa Rica – Luis Fernando Mora Picado	65
El uso de la evaluación diagnóstica en el PEA de la Matemática – Ana Paredes-Proaño	66
Relación de la práctica de ajedrez y el rendimiento matemático de los estudiantes del Colegio Comunal Orquídeas, Bogotá-Colombia – Irvin Gregorio Malave Castellano	67
El concepto de permutación: un análisis teórico – Astrid Carolina Archila Prada, Solange Roa Fuentes, Javier Camargo García	68
Evolución cognitiva del concepto de vector en un curso de álgebra lineal – Yulieth Alexandra Gutierrez Carrillo, Solange Roa Fuentes	69
Aprendizajes en el pensamiento reflexivo de un profesor de matemáticas en formación sobre la función logística y el ahorro – Jaiver David Rey Gómez, Sandra Evely Parada Rico	71
Tipos de generalización que producen estudiantes de grado octavo (12-14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones: una mirada desde la teoría de la objetivación – María Angélica Ramírez Archila, Ana Yamile Meza Quintero	72

El conocimiento unitario y pragmático en el aprendizaje de la definición de límite de una función – Jorge Fajardo Molinares	73
Descripción de la comprensión del concepto de función, bajo el modelo de van Hiele, para estudiantes de grado 9° en la Institución Educativa Simón Bolívar, inspección de San Francisco en el municipio del Calvario-Meta – Monica Beltrán Silva, Alba Soraida Gutierrez Sierra	74
Ecuaciones Diferenciales	
Subarmónica en el modelo de la parla giratoria – Alexander Gutierrez G.	77
Método del balayage en grafos – Diego Alexander Castro Guevara	79
Opinion divergence dynamics around a political idea – Ricardo Cano Macias, Jorge Mauricio Ruiz V.	81
Infinitas soluciones para un problema tipo ϕ -Laplaciano – Sigifredo Herrón, Diana Sánchez, Emer Lopera	83
Minicursos	
Introducción a los modelos de dinámica de opinión – Norma Leticia Abrica-Jacinto	85
Introducción a Redes Complejas caso de aplicación: análisis de la red vial de una ciudad – Mónica Jhoana Mesa Mazo, Jorge Mario García Usuga	86
Análisis topológico de datos en sistemas complejo – Andy Rafael Dominguez Monterroza	87
Introducción a la creación de documentos dinámicos con Quarto – Jorge Luis Villalba Acevedo	88
Pósteres	
Fractal Topológico – Eliana Oostra Guerrero	90
El enigmático mundo de los números primos – Daniela Lezcano Cuello	91
Una aplicación de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales con retardo – Alisson C. Romero, Esteban Delgadillo	92

Schauder bases and James space – Yeny Paola Moreno	93
Clustering para visualización de regiones de convergencia del método de homotopía – Rafael Andrés Ramos Pájaro, Jeovanny Muentes Acevedo	94
Mejora de la eficiencia en urgencias: simulación de Montecarlo para la óptima asignación de personal – Santiago González Cruz, Adriana Romero Alfonso, Jorge Sanabria	97
Modelo para asignación de compensación a personal jefe por medio de curvas de nivel – Adriana Romero Alfonso, Santiago González Cruz, Jorge Sanabria	98

Matemática aplicada

El uso de la transformada RICC para la clasificación y agrupación de imágenes y señales

Autor: Evguenii Kourmychev
Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara, México
E-mail: evguenii.kourmychev@academicos.udg.mx

Resumen: El procesado, la clasificación y clusterización (agrupación) de imágenes y señales en general son de gran importancia tanto para diferentes ramas de la ciencia como para las ingenierías, considerando sus múltiples aplicaciones. Tomando en cuenta que dichas operaciones en gran medida dependen de espacios característicos, donde se implementa la clasificación, en esta plática, en primer lugar, presentamos las bases formales matemáticas de la transformada RICC (representación de imágenes por cúmulos coordinados) que se usa como espacio característico para la clasificación y agrupación de imágenes y señales. Se hace breve comparación conceptual de la RICC y LBP. Posteriormente, explicamos criterios y algoritmos de clasificación de imágenes a niveles de gris y a color:

1. en clases múltiples con y sin outliers;
2. a una sola clase.

Así mismo se explica el concepto de escala óptima de imágenes para la clasificación y codificado, llamado la RICC rápida. Se discuten algunas ideas sobre la RICC sensible a la anisotropía de imágenes e invariante a la rotación de imágenes con anisotropía.

Introducción al modelado matemático de la matriz agroecológica

Autores: N. Leticia Abrica-Jacinto¹, Eugenio Azpeitia,
Verónica Zepeda, Mariana Benítez
Universidad del Mar¹
E-mail: leticia.abrica@gmail.com¹

Resumen: Los sistemas agroecológicos son definidos como el conjunto de especies y procesos ecológicos asociados a un área de cultivo, son ecosistemas que han sido modificados por el ser humano con el objetivo de producir alimentos. La *matriz agroecológica* es definida como el territorio, en el sistema agroecológico, con parches de vegetación natural y de cultivo interconectados. Una forma de caracterizar a la matriz agroecológica es por medio de su configuración y sus propiedades. La *configuración* nos habla de la forma en la que están distribuidos los parches. Por ejemplo, pequeños parches de cultivo y de conservación mezclados, o amplias extensiones de cultivo separadas de zonas de conservación. Las *propiedades* de la matriz se refiere a la variedad o tipo de parches (e.g., monocultivos, policultivos y hábitat conservado), a la facilidad con la que especies pueden transitar por ella, entre otras cosas. Tanto la configuración como las propiedades de la matriz afectan a los sistemas agroecológicos en cuestiones como la biodiversidad y la productividad asociados a ellos. En esta charla describiremos la metodología para estudiar las posibles consecuencias que tienen la configuración y la propiedades de la matriz agroecológica en la abundancia y riqueza de las especies. Tal metodología se basa en tres elementos principales: a) descripción de las interacciones de las especies, por ejemplo, interacciones tróficas descritas por medio de *matrices de interacción* [1, 2], b) una dinámica poblacional para estudiar la composición de la población y sus variaciones a lo largo del tiempo [3], y c) el modelado espacial, el cual integra la dinámica poblacional con la matriz agroecológica.

Palabras & frases clave: Modelado matemático, redes tróficas, dinámica poblacional, matriz agroecológica.

Referencias

- [1] Abrica-Jacinto, N. Leticia, Mariana Benítez, Eugenio Azpeitia. “Matrices de interacciones: conceptos y modelos de redes alimentarias.” Revista Mexicana de Biodiversidad. *Aceptado*.
- [2] Williams, Richard J., and Neo D. Martinez. “Simple rules yield complex food webs.” Nature 404.6774 (2000): 180-183.
- [3] Abrica-Jacinto, N. Leticia, Verónica Zepeda, Mariana Benítez, Eugenio Azpeitia. “Population dynamics in food webs.” The 12th International Conference on Complex Networks and their Applications. *Proceedings, aceptado y en proceso de envío*.

Application of an adaptive Bayes factors to balanced ANOVA models

Autor: Daiver De Jesús Vélez Ramos
 Universidad de Puerto Rico en Río Piedras
 E-mail: daiver.velez@upr.edu

Resumen: Adaptive Bayes factors are constructed from adaptive significance levels and the commonly known minimum Bayes factors (links between p-value and Bayes factors). These minimum Bayes factors are easy to calculate and explain. However, they do not behave as a Bayes factor. For example, they do not change with the size of the sample. The reason why they are adjusted with adaptive significance levels see [Vélez et al. [2], Pérez and Pericchi [3], Hoyos et al. (2023)]. What they are trying to establish with these adaptive Bayes factors is an equivalence between the common practice in Frequentist statistical analysis to draw conclusions based on statistical significance and the Bayes factors from the Bayesian point of view. In this article, we want to apply an adaptive Bayes factor proposed by Vélez et al.(2023) to balanced analysis of variance (ANOVA) models in different configurations namely: One-way ANOVA and Two-way ANOVA

Palabras & frases clave: P-value Calibration, Adaptive Bayes Factor, ANOVA, Adaptive significance Levels.

Introducción

In the Frequentist literature, in fixed effects ANOVA models the parameters, in the one-way classification, are viewed as non-random. An alternative random effects approach is to view these parameters as a sample from a probability distribution, with the usual choice being $\theta_{-iid}N(0, \sigma_{\theta}^2)$. From a Frequentist perspective, the choice is based on whether the units that are selected can be viewed as being a random sample from some larger distribution of effects. Often, patients in a trial may be regarded as a random sample from some population, while treatment effects may be regarded as fixed effects. In the latter, the objective of the researcher is to extend the conclusions based on a sample of treatment levels to all treatment levels in the population. In fact, the null hypothesis of random effects ANOVA is quite different from its fixed effects counterpart. Statistical analysis is often used to reason about scientific questions based on a data sample, with the goal of determining “which parameter values are supported by the data and which are not”. Here is where the p-values come in. The p-value is the probability, under the assumption of no association or no effect (the null hypothesis H_0), of obtaining a result equal to or more extreme than what was actually observed [Goodman (2005)]. p-Values for point null hypotheses still dominate most of the applied literature (Greenland and Poole (2013)), despite the fact that p-values are commonly misused [Wasserstein and Lazar (2016), Matthews et al. (2017)]. Bayesian literature has been criticizing for several decades the implementation of hypothesis testing with fixed significance levels, and in particular the use of the scale p-value $< 0,05$. That discussion was mostly regarded as a philosophical issue about the wrong interpretation of p-values as probabilities of the null hypothesis. However, the crisis of Fisher’s scale of evidence exploded when scientific researchers, largely outside departments of Mathematics and Statistics, began reporting very low rates of reproducible scientific presumed findings [Benjamin et al. (2018), Amrhein et al. (2019)]. Currently, there are alternatives to calibrate the significance levels with the sampling information, see [Pérez and Pericchi (2014), Vélez et al. (2022), Benjamin et al. (2018), Hoyos et al. (2023)]. Some of the Bayes factors proposed in the literature are based on the Bayesian Information Criterion (BIC) [Schwarz (1978)]; in this article, we use a consistent adaptive Bayes factor proposed by Vélez et al. (2023) which is calibrated using the Prior Based BIC (PBIC) (Bayarri et al., 2019) and we apply it to a balanced ANOVA model with random effects.

Referencias

- [1] Vélez, D., L. Pericchi, and M. Pérez (2023). From p-values to posterior probabilities of null hypotheses. *Entropy* 25, 618.
- [2] Vélez, D., M. E. Pérez, and L. R. Pericchi (2022). Increasing the replicability for linear models via adaptive significance levels. *TEST* 31, 771–789.
- [3] Pérez, M. E. and L. R. Pericchi (2014). Changing statistical significance with the amount of information: The adaptive alfa significance level. *Statistics and Probability Letters* 85, 20-24.

Modelado de parámetros de calidad del agua con redes complejas

Autores: Mónica Jhoana Mesa Mazo¹, Jorge Mario García Usuga², César Augusto Acosta Minoli³

Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt¹, Universidad del Quindío^{1,2,3}

E-mail: mmesa4@cue.edu.co¹, jmgarcia@uniquindio.edu.co², cminoli@uniquindio.edu.co³

Resumen: La medición de nitrógeno, fosfato y temperatura del agua en cuencas hidrográficas desempeña un papel crucial en la gestión y conservación de los recursos hídricos. Estos parámetros son indicadores clave de la calidad del agua y ofrecen información valiosa para abordar una serie de preocupaciones ambientales y sociales. El nitrógeno y el fosfato son nutrientes esenciales para la vida acuática y terrestre, pero cuando se presentan en exceso, pueden provocar graves problemas de contaminación del agua. El monitoreo constante de estos nutrientes permite identificar fuentes de contaminación, prevenir la eutrofización (el crecimiento excesivo de algas) y proteger la biodiversidad en los ecosistemas acuáticos. La temperatura del agua, por su parte, es un indicador sensible a los cambios climáticos y a las actividades humanas. Su seguimiento ayuda a comprender y mitigar los efectos del cambio climático en los ecosistemas acuáticos y a garantizar un hábitat adecuado para la vida silvestre. Además, la medición de estos parámetros es esencial para garantizar la seguridad del agua potable, ya que niveles elevados de nutrientes y temperatura pueden afectar la calidad del agua para el consumo humano, lo que tiene implicaciones directas en la salud pública. En resumen, la medición de nitrógeno, fosfato y temperatura del agua en cuencas hidrográficas es esencial para preservar la calidad del agua, proteger la biodiversidad, abordar el cambio climático y garantizar la seguridad del suministro de agua potable. Estos datos son fundamentales para la toma de decisiones informadas en la gestión y conservación de los recursos hídricos, contribuyendo así a un entorno más saludable y sostenible. Es por esta razón que evaluar el contenido de estos parámetros y desarrollar una herramienta de software que permita predecir y modelar su contenido y comportamiento es esencial para la toma de decisiones de los organismos de control.

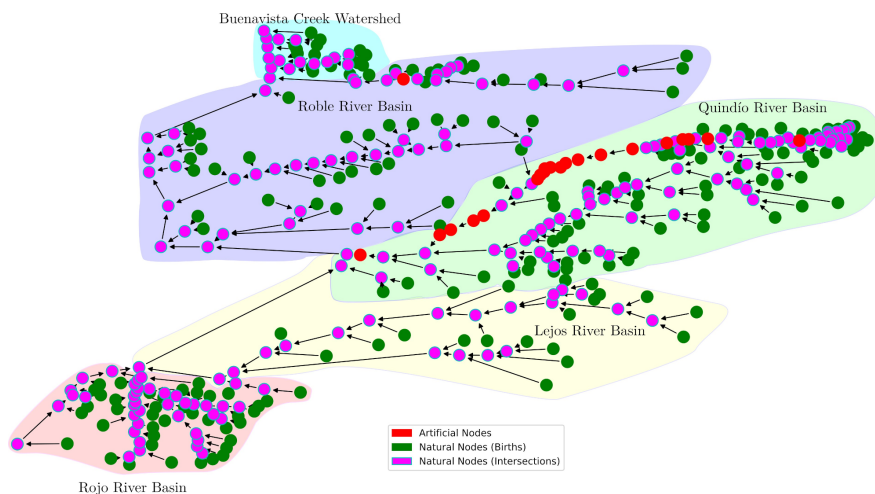


Figura 1: Red compleja donde los nodos son lugares en la red y las aristas son los cursos naturales de los ríos

Para la creación de la red de la fig 1 se tomaron como punto de partida la red o grafo construido en [6, 7, 8], el cual presenta una red dirigida de 409 nodos y 408 aristas que representa la red hidrográfica del departamento del

Quindío. Con esta información, se construirá el Dataframe el cual tendrá las siguientes variables: Nodo inicial, Nodo final, Distancia, Velocidad promedio y Orden.

Para modelar el transporte de partículas en el agua en específico el Nitrógeno, se utiliza el modelo de Nitrificación [1, 4]. Aquí tienes las ecuaciones en formato ****LaTeX****:

$$\begin{aligned}\frac{dN_o}{dt} &= -k_{oa}N_o \\ \frac{dN_a}{dt} &= k_{oa}N_o - k_{ai}N_a \\ \frac{dN_i}{dt} &= k_{ai}N_a - k_{in}N_i \\ \frac{dN_n}{dt} &= k_{in}N_i\end{aligned}\tag{1}$$

Donde N_o, N_a, N_i, N_n denotan Nitrógeno orgánico, Amoniaco, nitritos y nitratos respectivamente. K_{oa}, k_{ai}, k_{in} son constantes de nitrificación. Ahora bien, con respecto a los fosfatos Chapra [4] proponen un modelo basado en ecuaciones diferenciales ordinarias para el fosforo orgánico:

$$\frac{dP_{org}}{dt} = \pi P A - K_{p,org} P_{org} - K_{p,sett} P_{org},\tag{2}$$

donde P_{org} Concentración de fósforo orgánico, A es la concentración de amoniaco, π es el porcentaje de fósforo contenido en algas, $k_{p,org}$ Velocidad de decaimiento del fósforo orgánico, $k_{p,sett}$ Velocidad de sedimentación del fósforo orgánico.

Con estas ecuaciones se modela ambos parámetros de calidad del agua, dando información a la red sobre cómo estas se distribuyen en toda la cuenca.

Palabras & frases clave: Cuencas hidrográficas, departamento del Quindío, temperatura del agua, nitrógeno disuelto, fosfatos, redes complejas.

Referencias

- [1] Benedini, M., & Tsakiris, G. (2013). *Water quality modelling for rivers and streams*. Springer Science & Business Media.
- [2] Cui, B., Wang, C., Tao, W., & You, Z. (2009). "River channel network design for drought and flood control: A case study of xiaqinghe river basin, jinan city, china." *Journal of Environmental Management*, 90(90), 3675–3686.
- [3] Sivakumar, B., & Woldemeskel, F. (2014). Complex networks for streamflow dynamics. *Hydrology and Earth System Sciences*, 11(18), 7255–7289.
- [4] Chapra, S. C. (2008). *Surface water-quality modeling*. Waveland press.
- [5] MINISTERIO DE AMBIENTE Y DESARROLLO SOSTENIBLE. (2022). *Estudio Nacional del agua-ENA 2022*. República de Colombia. Recuperado de https://www.andi.com.co/Uploads/ENA%202022_compressed.pdf
- [6] García Usuga, J. (2022). *Simulación de la evolución de los parámetros físico - químicos del agua en las cuencas del departamento del Quindío, basada en redes complejas y ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Nacional de Colombia.
- [7] García-Usuga, J. M., Olivar-Tost, G., Mesa-Mazo, M. J., & Acosta-Minoli, C. A. (2021). Modeling the dynamics of total suspended solids in a mountain basin using network theory. *River Research and Applications*, 37(7), 955–966.

- [8] García, J. M., Mesa, M. J., & Olivar, G. (2020). Application of the theory of networks to model a drainage network of a watershed: case study department of Quindío Colombia. *Hidrobiológica*, 30(2), 129–142.
- [9] Gaudard, A., Weber, C., Alexander, T. J., Hunziker, S., & Schmid, M. (2018). Impacts of using lakes and rivers for extraction and disposal of heat. *WIREs Water*, 5(5), e1295.
- [10] Sierra, C. A. (2021). *Calidad del agua: evaluación y diagnóstico*. Ediciones de la U. Universidad de Medellín.
- [11] Tzatchkov, V. G., Aldama, A. A., & Arreguin, F. I. (2002). “Advection-dispersion-reaction modeling in water distribution networks.” *Journal of Water Resources Planning and Management*, 128(5), 334–342.
- [12] Tzatchkov, V., Aldama Rodríguez, A., & Arreguín Cortés, F. (2000). “Modelación numérica de la advección y dispersión de solutos en redes de distribución de agua potable.” *Instituto Mexicano de Tecnología del Agua IMTA*, 15(3), 101–115.
- [13] Zuluaga, V., García, J. M., Mesa, M. J., & Acosta-Minoli, C. A. (2020). Use of network theory to model water quality parameters in a hydrological network. *Journal of Physics: Conference Series*, 1448, 012006.

Múltiples ciclos límite en un modelo de depredación del tipo Leslie

Autores: Paulo Cesar Tintinago Ruiz¹, Leonardo Duvan Restrepo²
Universidad del Quindío¹, Universidad del Tolima²
E-mail: pctintinago@uniquindio.edu.co¹, ldrestrepoa@ut.edu.co²

Resumen: En este trabajo se muestran los resultados principales del estudio matemático de un modelo de depredación del tipo Leslie descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se demuestra que las soluciones del sistema son acotadas, mostrando que el modelo está bien propuesto. Se determinan las condiciones de existencia de los puntos de equilibrio y se establece la naturaleza de cada uno de ellos. Se demuestra la existencia de curvas separatrices y curvas heteroclinicas. El resultado más importante es la determinación de ciclos infinitesimales y no infinitesimales. Se mostraran algunas simulaciones y la interpretación de los resultados matemáticos obtenidos.

Palabras & frases clave: Modelo depredador-presa, respuesta funcional, estabilidad, bifurcación.

Referencias

- [1] Arrowsmith, D. K. and Place, C. M. Dynamical System. Differential equations, maps and chaotic behaviour, Chapman and Hall, 1992.
- [2] Chicone, C. Ordinary differential equations with applications, Texts in Applied Mathematics, 34, Springer, 1999.
- [3] Dumortier, F., Llibre, J. and Artés, J. C. Qualitative theory of planar differential systems, Springer, 2006.
- [4] Gaiko, Valery. Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem. Vol. 562. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] González-Olivares E., P. Tintinago-Ruiz and A. Rojas Palma, A Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid functional response, International Journal of Computer Mathematics 92 (2015) 1895-1909.
- [6] P. Turchin, Complex populations dynamics: A theoretical/empirical synthesis, Princeton University Press, 2003.

Modelo matemático para la dinámica de la infección por VIH en una población con estructura de edad y condiciones de riesgo asociadas

Autores: Francisco Andrés Betancourt-Arteaga¹, Hernán Darío Toro-Zapata², Jorge Mario García-Usuga³
 Universidad del Quindío^{1,2,3}
 E-mail: fabetancourt@uniquindio.edu.co¹, hdtoro@uniquindio.edu.co², jmgarcia@uniquindio.edu.co³

Resumen: La Teoría de Redes Complejas es un área de la matemática con bases en la teoría clásica de grafos de las matemáticas discretas. En las últimas décadas, y gracias al surgimiento de los métodos computacionales, se ha dado un desarrollo acelerado de las técnicas de análisis y se han encontrado múltiples aplicaciones a diversos problemas de la Ciencia y la Tecnología. En este sentido, este trabajo pretende exponer la utilidad de las redes complejas para estudiar la dinámica de propagación del VIH en una población susceptible con diferentes grupos etarios y condiciones de riesgo, donde los vértices de la red representan personas; adicionalmente, se incorpora en cada vértice infectado la dinámica de infección por VIH con diferentes características en la escala inmunológica, la cual es modelada mediante un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, EDO. Esta estructura multiescala del modelo permite condicionar la dinámica de propagación en la escala poblacional al estado particular inmunológico de los individuos y viceversa.

Palabras & frases clave: Modelos matemáticos; VIH; sistema inmunológico; terapia antirretroviral, redes complejas.

Introducción

Para la implementación de la red compleja, se tomó como base una red aleatoria de tipo Barabási - Albert [1] [2], [3] con un parámetro $k = 8$, indicando un número promedio de conexiones, es decir, cada nodo de la red representa una persona, y en promedio cada persona tiene de media 8 posibles parejas sexuales. La cantidad de nodos fue de 450.000. En la Figura 2 se muestra la distribución de grado de los nodos de la red, en la cual, los nodos de bajo grado,

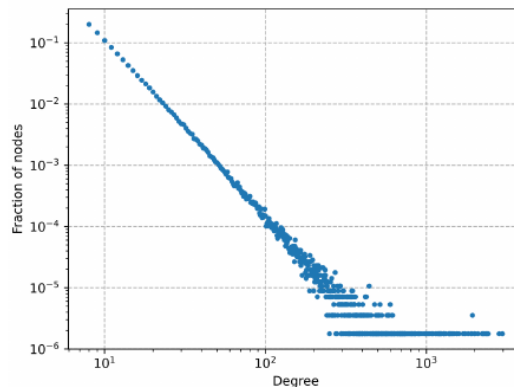


Figura 2: Distribución de grado de los nodos de la red

es decir, los que presentan un número bajo de conexiones son más numerosos; mientras que los nodos de grado alto son poco frecuentes. Ahora bien, en este trabajo, para simular el contagio entre personas (nodos de la red), se propone

un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias para la dinámica de interacción del VIH con el sistema inmunológico de una persona infectada (nodos infectados). El modelo permite describir en términos de concentración promedio los niveles de células T CD4 susceptibles a la infección $T = T(t)$, células T CD4 infectadas $T^* = T^*(t)$, células T CD8 supresoras $C = C(t)$, carga viral $V = V(t)$ y carga viral no infecciosa $W = W(t)$ de cada individuo a lo largo del tiempo t . N Número promedio de producción viral; c Tasa de eliminación del virus; β Tasa de infección de las células T CD4 susceptibles; σ Tasa de producción constante de células T CD4 ; μ Tasa de muerte natural de las células T CD4 no infectadas; δ Tasa de muerte de las células T CD4 infectadas por causa de la infección; λ Tasa de proliferación de células T CD8 activas; ω Tasa de mortalidad de las células T CD8 activas; α Tasa de muerte por acción citotóxica; u Terapia combinada de ITI e IP; por otro lado las variables de efectividad de las terapias para el modelo inmunológico de VIH: $\varepsilon_1 \in [0, 1]$ efectividad inhibidores de la transcriptasa inversa, clase de medicamentos antirretrovirales que se usan para tratar la infección por VIH al inhibir el proceso de transcripción inversa y $\varepsilon_2 \in [0, 1]$ efectividad inhibidores de la proteasa, clase de medicamentos antivirales que se usan ampliamente para tratar el VIH/SIDA al inhibir la producción de la enzima proteasa necesaria para la producción de partículas virales infecciosas [4].

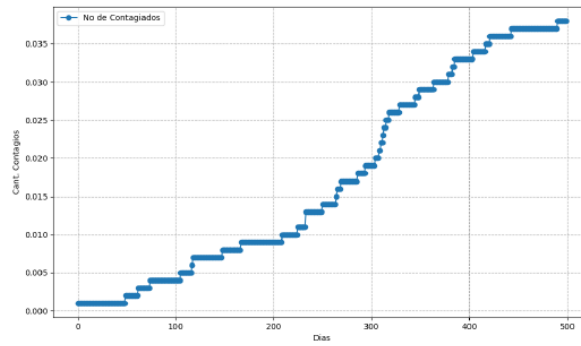


Figura 3: Simulación con la red compleja de 450.000 personas acoplada al sistema 3, con individuo inicial un adulto entre 28 y 42 años. simulación llevada a cabo durante 500 días

Con lo que se ha discutido hasta ahora, se describe un modelo completo que permite que el virus se establezca en el sistema inmune de una persona infectada:

$$\begin{cases} \dot{T} &= \sigma - \beta(1 - \varepsilon_1 u) TV - \mu T \\ \dot{T}^* &= \beta(1 - \varepsilon_1 u) TV - \frac{\alpha T^*}{1 + \alpha T^*} C - \delta T^* \\ \dot{C} &= \lambda T^* - \omega C \\ \dot{V} &= N\delta(1 - \varepsilon_2 u) T^* - cV \\ \dot{W} &= N\delta\varepsilon_2 u T^* - cW, \end{cases} \quad (3)$$

el cual está sujeto a condiciones iniciales no negativas. Además está definido en el espacio de parámetros $\Theta = \{\sigma, \mu, \beta, \delta, \alpha, \lambda, \omega, c\}$ donde $\sigma > 0, 0 < \mu \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \delta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1, \lambda > 0, 0 < \omega \leq 1$ y $0 < c \leq 1$.

Con la red compleja y el modelo planteado en (3), se simuló durante 500 días con 450.000 nodos y sólo un infectado inicial el primer día. La población de los mismos está dividida en niños, adolescentes, adultos y ancianos; cada uno de los grupos de personas tiene características inmunológicas diferentes que los hacen susceptibles a la infección.

En la Figura 3 se observa como la infección se extiende rápidamente cuando se toma un nodo (persona) con edad adulta. Ahora bien, si el individuo inicial se toma un niño con edades entre los 0 y los 4 años la dinámica no es la misma.

Referencias

- [1] Barabási, A. L. and Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks, *Science* 286, pp 509-512.
- [2] Barabási, A.-L. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press.
- [3] Newman, M. (2010). *Networks: An Introduction*. Oxford University Press.
- [4] MORENO ÁLVAREZ, AROA, *HIV/AIDS Study. Bibliographic review of the virus and mathematical models.*, Universitat Politècnica de Catalunya, B.S. thesis 67 (2020).

Explorando fronteras: dinámicas antipodales y estabilidad en sistemas esféricos conformes de $2, n$ -cuerpos

Autor: Ruben Dario Ortiz Ortiz
Universidad de Cartagena
E-mail: rortizo@unicartagena.edu.co

Resumen: En este trabajo abordamos el problema de los 2 y n -cuerpos en la esfera conformal bidimensional \mathbb{M}_R^2 , con radio $R > 0$, introduciendo un potencial alternativo que evita singularidades en puntos antipodales. Investigamos el comportamiento límite de los equilibrios relativos bajo la simetría de $SO(2)$, enfocándonos en el movimiento de pares de masas positivas a lo largo de geodésicas. Demostramos que partículas puntuales antipodales con masas positivas, cumpliendo una condición específica sobre la relación radio-masa, pueden moverse libremente como un equilibrio relativo a lo largo de la geodésica asociada con el campo vectorial de Killing canónico en \mathbb{M}_R^2 . Además, se muestra que un número par de cuerpos con posiciones conjugadas por pares, formando un n -ágono regular y con masa m uniforme, pueden desplazarse libremente en una geodésica con velocidades adecuadas, donde este movimiento geodésico simula un equilibrio relativo. También se incluye una fórmula para el centro de masa. Se establece una relación para el equilibrio relativo en el problema de los 2 cuerpos en la esfera, análoga a la ley de Snell.

Referencias

- [1] PP Ortega Palencia, G Reyes Victoria, Conjugated equilibrium solutions for the 2–body problem in the two dimensional sphere \mathbb{M}_R^2 for equal masses, *arXiv preprint arXiv:1908.06011*, (2019).

Caracterización de series temporales de rayos cósmicos a largo plazo mediante métricas de curvatura geométrica de redes

Autor: D. Sierra-Porta
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: dporta@utb.edu.co

Resumen: Este estudio explora la relación entre la geometría y las dinámicas no lineales en series temporales de conteos de rayos cósmicos registradas en monitores de neutrones ubicados en estaciones terrestres. Utilizando técnicas avanzadas de análisis geométrico y topológico, se construyen redes complejas a partir de las series temporales y se calculan medidas de curvatura como la curvatura de Ollivier-Ricci, la curvatura de Forman-Ricci y el flujo de Ricci para cada serie. El análisis revela correlaciones significativas entre estas métricas de curvatura y parámetros clave como la rigidez de corte y la latitud del detector. Específicamente, se observa una relación directa entre la curvatura de Forman-Ricci y la rigidez magnética, mientras que se encuentra una relación inversa entre el flujo de Ricci y la rigidez magnética. Estos hallazgos sugieren que la estructura geométrica de las redes, influenciada por las condiciones geomagnéticas, juega un papel crucial en la variabilidad, complejidad y fractalidad de las series temporales de rayos cósmicos. Además, el estudio destaca la importancia de considerar la topología de las redes y las métricas de curvatura en el análisis de datos de rayos cósmicos, ofreciendo nuevas perspectivas para comprender los fenómenos del clima espacial y mejorar los modelos predictivos. Este enfoque integrador no solo avanza nuestro conocimiento sobre la dinámica de los rayos cósmicos, sino que también tiene importantes implicaciones para mitigar los riesgos asociados con las condiciones del clima espacial en la Tierra.

Palabras & frases clave: Curvatura de Ollivier-Ricci, Curvatura de Forman-Ricci, Flujo de Ricci, Análisis Topológico de Datos, Rayos Cósmicos, Clima Espacial.

Ciencia de datos y actividad física

Autor: Oscar Eduardo Martínez
Universidad Sergio Arboleda
E-mail: oscar.martinez@usa.edu.co

Resumen: El auge de la actividad física post pandemia ha estado ligado a las aplicaciones y dispositivos que permiten hacer seguimiento de las mismas. Esto sumado a la popularidad que ganaron algunos deportes en donde el distanciamiento social se facilitaba (ciclismo, atletismo) da origen a una gran cantidad de datos para ser analizados. En este trabajo se documenta la recolección y análisis de datos, tanto geográficos como biométricos a través de dispositivos GPS, junto con su análisis para comprender la topografía de la ruta y cómo esta afecta el desempeño deportivo de quienes transitan, aplicando conceptos trigonométricos, de cálculo y estadística.

Palabras & frases clave: Ciencia de datos, Estadística, Cálculo, Trigonometría Esférica, Deporte, Ciclismo, Sensores, Matemática Aplicada.

Introducción

La bicicleta hace parte de la vida y las rutinas de muchos colombianos; desde el niño que recibe una como regalo de navidad hasta el gran campeón que conquista las rutas europeas, pasando por quien se gana la vida trabajando en ella. Este trabajo tiene sus orígenes en el ciclismo aficionado, entendido como la práctica esporádica de este deporte con fines recreativos o de salud. Esta práctica, combinada con la proliferación de dispositivos GPS y redes sociales, han dado origen a una gran cantidad de información obtenida a través de colaboración abierta distribuida (crowdsourcing). Estos datos han sido utilizados en trabajos académicos que permiten entender tanto el desempeño individual ([4], [1], [2]) como las tendencias grupales de los ciclistas urbanos y recreativos ([6], [3], [5]). En este trabajo, se toman datos generados en competencia, recolectados con un ciclocomputador, y descargados de la red social Strava para analizar el perfil del Alto de Guasquita, dar una interpretación adecuada a su pendiente, y ponderar su dificultad (desde lo deportivo) con respecto a otros puertos de la zona con pendiente similar.

Referencias

- [1] Repici, Michael. *Because My Garmin Told Me To: A New Materialist Study of Agency and Wearable Technology*. University of South Florida, 2019.
- [2] Wamsley, Kyle. *Optimal power-based cycling pacing strategies for Strava segments*. MS thesis. Kutztown University of Pennsylvania, 2014.
- [3] Fischer, Jaimy, Trisalyn Nelson, and Meghan Winters. *Riding through the pandemic: Using Strava data to monitor the impacts of COVID-19 on spatial patterns of bicycling*. *Transportation research interdisciplinary perspectives* 15 (2022): 100667.
- [4] Wolf, Stefan, et al. "Modeling in road cycling for optimal pacing strategies: theory vs. practice." *Journal of Science and Cycling* 7.2 (2018): 18-19.
- [5] Sun, Yeran, and Amin Mobasher. "Utilizing crowdsourced data for studies of cycling and air pollution exposure: A case study using strava data." *International journal of environmental research and public health* 14.3 (2017): 274.
- [6] Pogodzinska, Sylwia, Mariusz Kiec, and Carmelo D'Agostino. "Bicycle traffic volume estimation based on GPS data." *Transportation Research Procedia* 45 (2020): 874-881.

Teoría de grafos

On the Harary Laplacian-energy-like

Autor: Luis Medina Caamaño
 Universidad de Antofagasta
 E-mail: luis.medina@uantof.cl

Resumen: En esta presentación se darán resultados respecto de Harary Laplacian-energy-like, concepto recientemente introducido para un grafo conectado, simple y no dirigido G . En particular se mostrarán cotas para esta energía.¹

Palabras & frases clave: Matriz de Harary; Laplacian-energy-like; Reciprocal distance Laplacian matrix.

Introducción

Sea $G = (V, E)$ un grafo conectado, simple y no dirigido con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E . El orden de un grafo es la cardinalidad del conjunto de vértices. La matriz de adyacencia de un grafo G de orden n , denotada por $A(G)$, es una matriz de orden $n \times n$ tal que la entrada en la posición (i, j) es igual a 1 si el vértice i es adyacente al vértice j , y es igual a 0 en cualquier otro caso. Para $i = 1, \dots, n$, denotaremos por $\lambda_i(A(G))$ a los autovalores de la matriz de adyacencia.

La energía de un grafo es un concepto dado por Ivan Gutman en [2] como

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A(G))|.$$

En 2008, Liu and Liu, definen la Laplacian-energy-like de un grafo [4] como

$$LEL(G) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$$

donde $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G) = 0$, son los autovalores de la matriz Laplaciana de un grafo G .

La distancia entre los vértices v_i y v_j de G , denotada por $d(v_i, v_j) = d_{i,j}$, es igual al largo (número de aristas) del camino más corto que conecta v_i y v_j . La matriz de Harary de un grafo G , que es también conocida como la matriz Recíproca de la distancia, denotada por $RD(G)$, fue definida en 1993, independientemente en [3] y [6], como la matriz de orden n dada por

$$RD(G)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d(v_i, v_j)} & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

El grado de la recíproca de la distancia de un vértice v , denotado por $RT(v)$, es dado por

$$RT(v) = \sum_{\substack{u \in V(G) \\ u \neq v}} \frac{1}{d(u, v)}.$$

Sea $RT(G)$ la matriz diagonal de grados de la recíproca de la distancia definida por $RT_{i,i} = RT_i = RT(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$.

En 2018, los autores definen la matriz Laplaciana de la recíproca de la distancia [1] como

$$RL(G) = RT(G) - RD(G).$$

¹Trabajo desarrollado con el soporte del Programa Regional MathAmSud código AMSUD220015.

Dado que $RL(G)$ es una matriz real simétrica, podemos escribir los autovalores en forma decreciente

$$\lambda_1(RL(G)) \geq \lambda_2(RL(G)) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(RL(G)) \geq \lambda_n(RL(G)).$$

Observamos que $RL(G)$ es una matriz semidefinida positiva.

En [5], definimos y damos cotas para la Harary Laplacian-energy-like

$$HLEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_i(RL(G))}.$$

El trabajo fue desarrollado en conjunto con Jonnathan Rodríguez y Macarena Trigo y constamos con el apoyo y financiamiento del Programa Regional MathAmSud código AMSUD220015.

Referencias

- [1] R. Bapat, S. K. Panda. The Spectral Radius of the Reciprocal Distance Laplacian Matrix of a Graph, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* (2018) 44 (5), 1211-1216.
- [2] I. Gutman. The energy of a graph, *Ber. Math. Statist. Sect. Forschungsz. Graz*, 103 (1978), 1–22.
- [3] O. Ivanciuc, T.S. Balaban, A.T. Balaban, *Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices*, *Journal of Mathematical Chemistry* 12 (1993) 309-318.
- [4] J. Liu, B. Liu. A Laplacian-energy-like invariant of a graph. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 59 (2008) 355-372.
- [5] Medina, L.; Rodríguez, J.; Trigo, M. New Spectral Results for Laplacian Harary Matrix and the Harary Laplacian-Energy-like Applying a Matrix Order Reduction. *Mathematics* 2024, 12, 2. <https://doi.org/10.3390/math12010002>
- [6] D. Plavsić, S. Nikolić, N. Trinajstić, Z. Mihalić. On the Harary index for the characterization of chemical graphs, *Journal of Mathematical Chemistry* 12 (1993) 235–250.

On the Estrada Index of Graphene Graph

Author: Jonnathan Alexander Rodriguez Zambrano

Universidad de Antofagasta

E-mail: jonnathan.rodriguez@uantof.cl

Abstract: The Estrada index, from the point of view of connectivity, is an interesting invariant to investigate as it allows the study and detection of the 3D properties of molecules and thus be able to compare them. A graphene sheet is an atomic-scale honeycomb lattice composed of carbon atoms linked in hexagonal shapes, with each carbon atom covalently bonded to three other carbon atoms. In this paper, considering the spectral theory of graphs as a tool, we study a way to discretize the graphene sheet and establish lower bounds for the Estrada index of this chemistry structure.²

Keywords: Estrada Index; chemical graph theory; energy; spectral moments.

References

- [1] Ivan Gutman, Hanyuan Deng, and Slavko Radenković, “The Estrada Index: An Updated Survey,” in Selected Topics on Applications of Graph Spectra, ed. Dragos Cvetković and Ivan Gutman (Beograd: Matematicki Institut, 2011), 155–74.
- [2] Bo Zhou, “On Estrada Index,” MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 60 (2008): 485–92.
- [3] Jélica Pantáz - Jonnathan Rodriguez, On the Estrada Index of Graphene Graph, Polycyclic Aromatic Compounds, (2022).

²J. Rodriguez was supported by MINEDUC-UA project, code ANT-1899 and Funded by the Initiation Program in Research - Universidad de Antofagasta, INI-19-06 and Programa Regional MathAmSud code AMSUD220015.

On spectral invariants of the α -mixed adjacency matrix

Author: Eber Javier Lenés Puello
 Universidad del Sinú, Seccional Cartagena
 E-mail: elenes@unisinucartagena.edu.co

Abstract: Let \hat{G} be a mixed graph and $\alpha \in [0, 1]$. Let $\hat{D}(\hat{G})$ and $\hat{A}(\hat{G})$ be the diagonal matrix of vertex degrees and the mixed adjacency matrix of \hat{G} , respectively. The α -mixed adjacency matrix of \hat{G} is the matrix

$$\hat{A}_\alpha(\hat{G}) = \alpha\hat{D}(\hat{G}) + (1 - \alpha)\hat{A}(\hat{G}).$$

We study some properties of $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ associated with some type of mixed graphs, namely quasi-bipartite and pre-bipartite mixed graphs. A spectral characterization for pre-bipartite and some class of quasi-bipartite mixed graphs is given. For a mixed graph \hat{G} we exploit the problem of finding the smallest α for which $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ is positive semi-definite. This problem was proposed by Nikiforov in the context of undirected graphs. It is proven here that, for a mixed graph this number is not greater than $\frac{1}{2}$ and that a connected mixed graph \hat{G} with $n \geq 2$ is quasi-bipartite if and only if this number is exactly $\frac{1}{2}$. The spread of the α -mixed adjacency matrix is the difference among the largest and the smallest α -mixed adjacency eigenvalue. Upper and lower bounds for the spread of the α -mixed adjacency matrix are obtained. The α -mixed Estrada index of \hat{G} is the sum of the exponentials of the eigenvalues of $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$. In this paper, bounds for the eigenvalues of $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ are established and, using these bounds some sharp bounds on the mixed Estrada index of $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ are presented.

Keywords: Mixed graph; mixed Laplacian matrix; α -mixed adjacency matrix; spread; α -mixed Estrada Index.

Introduction

This section introduces the definition of mixed graphs and some basic notation and results used throughout the paper. Recall that a mixed graph \hat{G} is a pair $(V(\hat{G}), E(\hat{G}))$ where $V(\hat{G}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ is a nonempty set of objects called vertices and a link set $E(\hat{G})$ of cardinality m obtained by considering a subset

$$\mathcal{E}(\hat{G}) = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V(\hat{G}), v_i \neq v_j\},$$

such that if $(v_i, v_j), (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\hat{G})$ then the edge $\overline{v_i v_j} \in E(\hat{G})$ and if $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\hat{G})$ and $(v_j, v_i) \notin \mathcal{E}(\hat{G})$ then the arc $\overrightarrow{v_i v_j} \in E(\hat{G})$. The vertices v_i and v_j are, respectively, the tale and the head of the arc $\overrightarrow{v_i v_j} \in E(\hat{G})$.

The graph is said to be an undirected graph if the set $E(\hat{G})$ only contains edges, and if $E(\hat{G})$ only contains arcs, the graph is called a directed graph or digraph.

The set of links of \hat{G} is simply denoted by $E(\hat{G}) = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_m\}$. The concept of mixed graph includes the extreme cases, that is, the case of undirected graphs and the case of digraphs. The underlying graph of a mixed graph \hat{G} , denoted by \hat{G}_U , is a simple undirected graph obtained considering as its edges all the links of \hat{G} (edges or arcs).

In order to define the degree of a vertex, say v_i , we focus on the underlying graph, \hat{G}_U . In fact, the degree of a vertex v_i is the degree of a vertex in \hat{G}_U and it is denoted by d_i . Let $\hat{e} \in E(\hat{G})$. Denote by \hat{e}^c the link defined as follows. If \hat{e} is an arc, then \hat{e}^c is an edge. Similarly, if \hat{e} is an edge, then \hat{e}^c is a directed arc. The set $E(\hat{G}^c) = \{\hat{e}^c : \hat{e} \in E(\hat{G})\}$ is called the set of *complementary links* of \hat{G} . The graph $\hat{G}^c = (V(\hat{G}), E(\hat{G}^c))$ is the *complement mixed graph* of \hat{G} . It is easy to notice that the underlying graphs of \hat{G} and \hat{G}^c coincide.

Concerning the mixed Laplacian matrix, in [2], (see also [1]), the incidence matrix of \hat{G} was defined as $M(\hat{G}) = (m_{u\hat{e}})$, where $m_{u\hat{e}} = 1$ if the vertex u is incident to the edge \hat{e} or u is the tale of the arc \hat{e} ; $m_{u\hat{e}} = -1$ if the vertex u is the head of the arc \hat{e} ; $m_{u\hat{e}} = 0$ otherwise. Then, the mixed Laplacian matrix can be written as:

$$\hat{L}(\hat{G}) = M(\hat{G})M(\hat{G})^T, \quad (4)$$

where $M(\hat{G})^T$ is the transpose of $M(\hat{G})$. This matrix is symmetric and positive semi-definite. For any Hermitian matrix B of order n , its eigenvalues are denoted by $\lambda_i(B), i = 1, \dots, n$, and its spectrum by $Sp(B)$. If B is symmetric then its eigenvalues are real and they can be ordered as $\lambda_1(B) \geq \dots \geq \lambda_n(B)$. In this paper we order the eigenvalues of a symmetric matrix in a non increasing order. Then, we can write and order the eigenvalues of $\hat{L}(\hat{G})$ by $\lambda_1(\hat{L}(\hat{G})) \geq \lambda_2(\hat{L}(\hat{G})) \geq \dots \geq \lambda_n(\hat{L}(\hat{G})) \geq 0$.

The adjacency matrix of a mixed graph that is denoted here by $\hat{A}(\hat{G})$, was introduced in [1], and it is a matrix that has rows and columns indexed by the set of vertices of \hat{G} , where its (u, v) -entry is equal to 1 (respectively, -1) if the vertices u and v are connected by an edge (respectively, an arc), and 0, otherwise. The spectrum of $\hat{A}(\hat{G})$ is referred to as the spectrum of \hat{G} , and it is denoted by $Sp(\hat{G})$. We named it as mixed spectrum.

In X.D. Zhang and R. Luo [1], the Laplacian matrix of a mixed graph was obtained as the sum of the diagonal matrix of vertex degrees $\hat{D}(\hat{G})$ and the adjacency matrix $\hat{A}(\hat{G})$ (defined above), that is,

$$\hat{L}(\hat{G}) = \hat{D}(\hat{G}) + \hat{A}(\hat{G}). \quad (5)$$

If \hat{G} is an undirected graph, we just write G and the diagonal matrix of vertex degrees and the adjacency matrix are just denoted by $D(G)$ and $A(G)$, respectively. Additionally, if \hat{H} is a subgraph of \hat{G} , then $D_{\hat{G}}(\hat{H})$ denotes the diagonal matrix of vertex degrees of the vertices in \hat{H} considering its degrees in \hat{G} .

Note that if \hat{G} coincides with its underlying graph \hat{G}_U , the matrix in (5) coincides with the matrix $D(\hat{G}_U) + A(\hat{G}_U)$. This matrix is known as the signless Laplacian matrix of \hat{G}_U and it is denoted by $Q(\hat{G}_U)$ (see [3]). By other side, if the links in \hat{G} are only arcs the matrix in (5) coincides with the matrix $D(\hat{G}_U) - A(\hat{G}_U)$ which is known as the combinatorial Laplacian matrix of \hat{G}_U , and it is denoted by $L(\hat{G}_U)$ (see [3]).

Notation: If Z is a set, the cardinality of Z is denoted by $\sharp(Z)$. If B is a matrix, the notation $|B|$ represents a matrix whose (i, j) -entry is the modulus of the (i, j) -entry of B . B^T denotes its transpose. Moreover, if B is square and λ is an eigenvalue of B with \mathbf{u} as an eigenvector associated to it, the pair (λ, \mathbf{u}) is called an eigenpair of B . The algebraic multiplicity p of an eigenvalue λ is denoted by λ^{lp} . The trace of B is denoted by $\text{tr}(B)$. A zero matrix is denoted by $\mathbf{0}$ (the dimension should be clear from the context). A column vector in \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n) is denoted by \mathbf{v} , and its conjugate transpose is denoted by \mathbf{v}^* . The euclidean norm of \mathbf{v} is denoted by $\|\mathbf{v}\|$. If $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ we denote by \mathbf{v}_i its i -th coordinate, for all $i = 1, \dots, n$. The complete graph with n vertices is denoted by K_n and its complement is \bar{K}_n . Moreover, C_n is the cycle with order n and the complete bipartite graph is denoted by $\hat{K}_{a,b}$. The star with n vertices is \hat{S}_n . Additionally, for $u \in V(\hat{G})$, we consider $\Delta = \max_{u \in V(\hat{G})} d_u$ and $\delta = \min_{u \in V(\hat{G})} d_u$. Moreover, c_u and k_u are the number of edges and arcs, respectively, incident on a vertex u in a mixed graph. The number of links is just denote by m and when we want to specify the graph we write $m(\hat{G})$.

In what follows the α - mixed adjacency matrix is defined. Consider $\alpha \in [0, 1]$.

The α -mixed adjacency matrix of the mixed graph \hat{G} , is the matrix

$$\hat{A}_\alpha(\hat{G}) = \alpha \hat{D}(\hat{G}) + (1 - \alpha) \hat{A}(\hat{G}). \quad (6)$$

We note that

$$\hat{A}_0(\hat{G}) = \hat{A}(\hat{G}), 2\hat{A}_{1/2}(\hat{G}) = \hat{L}(\hat{G}), \text{ and } \hat{A}_1(\hat{G}) = \hat{D}(\hat{G}).$$

The α -adjacency matrix of a mixed graph \hat{G} is symmetric. As this matrix depends on the number α , with $\alpha \in [0, 1]$, its i -th eigenvalue will be denoted in a different way by $\mu_i(\alpha)$ (or $\mu_i(\alpha)(\hat{G})$, if we want to specify the graph). Then, if $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ is of order n we have:

$$\mu_1(\alpha) \geq \mu_2(\alpha) \geq \dots \geq \mu_n(\alpha). \quad (7)$$

In order to introduce a motivation for the study of the convex combination as in (6), we recall some results on the continuous dependence of the eigenvalues concerning its associated matrix. According to the citations in the text, matrices are faced here as linear operators. We recall that the vector space of the linear operators from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n , $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, is a normed vector space and any pair of norms are equivalent (see [4, Ch 1, Section 4]).

Following [4, Ch 2, Section 6], the eigenvalues of a symmetric linear operator can be regarded as continuous functions of the respective operator. Furthermore, as the norms are equivalent, any norm in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ can be used when the continuity of the eigenvalues (as functions of the linear operator) is considered. Thus, we will use the norm of the supreme (see [4, Ch 1, Section 4]).

Let $0 < \alpha, \beta < 1$. Noting that $\hat{A}(\hat{G}^c) = -\hat{A}(\hat{G})$, clearly:

$$\|\hat{A}_\alpha(\hat{G}) - \hat{A}_\beta(\hat{G})\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(\hat{A}_\alpha(\hat{G}) - \hat{A}_\beta(\hat{G}))\mathbf{x}\| \quad (8)$$

$$= |\alpha - \beta| \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(\hat{D}(\hat{G}) - A(\hat{G}))\mathbf{x}\| \quad (9)$$

$$= |\alpha - \beta| \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\hat{L}(\hat{G}^c)\mathbf{x}\|.$$

Therefore,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \hat{A}_\alpha(\hat{G}) = \hat{A}_\beta(\hat{G}),$$

and by continuity,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \mu_j(\alpha) = \mu_j(\beta).$$

The previous statement can be verified taking the limit when $\alpha \rightarrow \beta$ to the following system of inequalities

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1(\alpha) & \geq & \mu_2(\alpha) & \geq & \dots & \geq & \mu_n(\alpha) \\ \downarrow & \geq & \downarrow & \geq & \dots & \geq & \downarrow \\ \mu_1(\beta) & \geq & \mu_2(\beta) & \geq & \dots & \geq & \mu_n(\beta). \end{array}$$

We remark that, the inequalities in the middle mean that the eigenvalues of $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ tend (in an ordered way) to the eigenvalues of $\hat{A}_\beta(\hat{G})$ when α tends to β . This means that the eigenvalues of both matrices do not interlace.

Note that if $\alpha = 0$ and $0 < \beta < 1$, from (8) it is clear that

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \hat{A}_\beta(\hat{G}) = \hat{A}_0(\hat{G}) = \hat{A}(\hat{G}).$$

Therefore, using the definition of continuity in closed intervals and the continuity of the eigenvalues we have

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \mu_j(\beta) = \mu_j(0).$$

Moreover, if $0 < \alpha < 1$ and $\beta = 1$, from (8) it is clear that

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \hat{A}_\alpha(\hat{G}) = \hat{A}_1(\hat{G}) = \hat{D}(\hat{G}).$$

Again, using the same arguments as before

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mu_j(\alpha) = \mu_j(1).$$

Therefore, the ordered eigenvalues of $\hat{A}(\hat{G})$ change continuously to the ordered eigenvalues of $\frac{1}{2}\hat{L}(\hat{G})$, which change continuously to the ordered eigenvalues of $\hat{D}(\hat{G})$. Thus, the study of the parameterized family $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$ offers an unified spectral study of the matrices $\hat{D}(\hat{G})$, $\frac{1}{2}\hat{L}(\hat{G})$ and $\hat{A}(\hat{G})$.

References

- [1] X.D. Zhang, R. Luo. The Laplacian eigenvalues of mixed graphs. Linear Algebra Appl. 362 (2003), 109-119.

V Encuentro Matemático del Caribe

- [2] R. B. Bapat, J. W. Grossman, D. M. Kulkarni. Generalized matrix tree theorem for mixed graphs. *Linear Multilinear Algebra*. 46 (1999), 299–312.
- [3] A. E. Brouwer, W. Haemers. *Spectra of graphs*. Springer-Verlag (2012).
- [4] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren 132, 1976, Springer-Verlag, Berlin, New York.

Sistemas Dinámicos

Homeomorfismos con dimension de Hausdorff media maximal son genéricos

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo
 Universidad Tecnológica de Bolívar
 E-mail: jmuentes@utb.edu.co

Resumen: Un sistema dinámico es una función continua $\phi : M \rightarrow M$, también denotado por (M, ϕ) , donde M es un espacio topológico. En el área de sistemas dinámicos estudiamos el comportamiento cualitativo de la composición

$$\phi^n(x) = \phi \circ \dots \circ \phi(x).$$

Los sistemas dinámicos son clasificados por medio de conjugaciones topológicas: Si (M, ϕ) y (N, ψ) son dos sistemas dinámicos, decimos que (M, ϕ) está *incrustado* en (N, ψ) si existe una función $h : M \rightarrow N$ tal que $h : M \rightarrow h(M)$ es un homeomorfismo y $h \circ \phi = \psi \circ h$, es decir, el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

En este caso, se entiende que (M, ϕ) es un “sub-sistema” de (N, ψ) . Si $h(M) = N$, decimos que (M, ϕ) y (N, ψ) son *conjugados topológicamente* y $h : M \rightarrow N$ es llamado una *conjugación topológica*.

La *entropía topológica* de un sistema dinámico $\phi : M \rightarrow M$, que fue introducida por R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew en 1965, es una de las herramientas principales para caracterizar sistemas dinámicos. Sin embargo, Koichi Yano demostró que si N es una variedad compacta con dimensión topológica $\dim(N) \geq 2$, entonces el conjunto que consiste en todos los homeomorfismos $\phi : N \rightarrow N$ con entropía topológica infinita es residual en $\text{Hom}(N)$ (ver [12], 1980). Por lo tanto, es necesario buscar otras herramientas que nos permitan distinguir homeomorfismos cuando su entropía es infinita.

La *dimensión topológica media* de un sistema dinámico (M, ϕ) , denotada por $\text{mdim}(M, \phi)$, es un invariante bajo conjugación topológica. Esta noción fue introducida por Gromov en 1999 (ver [7], 1999) y refina la entropía topológica para sistemas con entropía infinita (ver [9], 2000).

Calcular el valor de $\text{mdim}(M, \phi)$ es una tarea difícil. En busca de encontrar otras formas de estimar $\text{mdim}(M, \phi)$, Lindenstrauss y Tsukamoto ([8], 2019) introdujeron la dimensión de Hausdorff media de un sistema dinámico $\phi : M \rightarrow M$, donde M es un espacio métrico compacto con métrica d . La dimensión media de Hausdorff de $\phi : M \rightarrow M$ se denota por $\text{mdim}_H(M, d, \phi)$. Tenemos que

$$\text{mdim}(M, \phi) \leq \text{mdim}_H(M, d, \phi).$$

En esta charla hablaremos de la construcción de la dimensión de Hausdorff media, presentaremos algunos ejemplos interesantes y algunas propiedades fundamentales. Además, si N es una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 2$, el conjunto de homeomorfismos en N con dimensión de Hausdorff media igual a n contiene un subconjunto residual de $\text{Hom}(N)$. Todos los resultados se pueden encontrar en [2]. Otros trabajos fundamentales sobre esta teoría son: [1], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11].

Palabras & frases clave: dimensión topológica media, dimensión métrica media, dimension de Hausdorff media, entropía topológica.

Referencias

- [1] Acevedo, Jeovanny M., Baraviera, A., Becker, A. J., & Scopel, É. “Metric mean dimension and mean Hausdorff dimension varying the metric.” Aceptado en *Qualitative Theory of Dynamical Systems* (2024).
- [2] Acevedo, Jeovanny Muentes. “Genericity of homeomorphisms with full mean Hausdorff dimension.” *Regular and Chaotic Dynamics* (2024): 1-17.
- [3] Acevedo, J.M. “Genericity of continuous maps with positive metric mean dimension”. *Results Math* **77**, 2 (2022).
- [4] Acevedo, J. D. J. M., Ibarra, S. R., & Cantillo, R. A. “Density of the level sets of the metric mean dimension for homeomorphisms”. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2024).
- [5] Dou, Dou. “Minimal subshifts of arbitrary mean topological dimension.” *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **37.3** (2016): 1411-1424.
- [6] Gutman, Yonatan. “Embedding topological dynamical systems with periodic points in cubical shifts.” *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **37.2** (2017): 512-538.
- [7] Gromov, Misha. “Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I.” *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* **2.4** (1999): 323-415.
- [8] Lindenstrauss, Elon, and Masaki Tsukamoto. “Double variational principle for mean dimension.” *Geometric and Functional Analysis* **29.4** (2019): 1048-1109.
- [9] Lindenstrauss, Elon, and Benjamin Weiss. “Mean topological dimension.” *Israel Journal of Mathematics* **115.1** (2000): 1-24.
- [10] Lindenstrauss, Elon. “Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem.” *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **89** (1999), 227–262.
- [11] Tsukamoto, Masaki. “Mean dimension of full shifts.” *Israel Journal of Mathematics* **230.1** (2019): 183-193.
- [12] Yano, Koichi. “A remark on the topological entropy of homeomorphisms.” *Inventiones mathematicae* **59.3** (1980): 215-220.

Sombreamiento para operadores de composición sobre un espacio de Hardy-Hilbert

Autor: Carlos Fabian Álvarez Escorcía
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso & Universidad del Sinú
E-mail: carlos.alvarez.e@pucv.cl & carlosfalvarez@unisinu.edu.co

Resumen: En esta charla abordaremos un operador lineal definido sobre un espacio de Hardy-Hilbert. Este operador es obtenido mediante la composición de funciones con una función fija, la cual llamaremos de símbolo. Para tal operador estudiaremos una noción de la dinámica lineal llamada de sombreamiento. Concretamente, daremos una caracterización de los símbolos que permiten al operador satisfacer una propiedad de sombreamiento.

Palabras & frases clave: Sombreamiento, Operador de composición, Espacio de Hardy

Introducción

Vamos considerar $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ como el semiplano derecho complejo. El espacio de Hardy-Hilbert de \mathbb{C}_+ es denotado por $H^2(\mathbb{C}_+)$. Este es un espacio de Hilbert de funciones holomorfas sobre \mathbb{C}_+ equipado con la norma

$$\|f\|_2 = \left(\sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Para cada $\beta \in \mathbb{C}_+$, el *kernel reproductor* para $H^2(\mathbb{C}_+)$ en β , es la función definida por $k_\beta(w) = \frac{1}{w + \beta}$. Este kernel satisface la siguiente relación fundamental

$$\langle f, k_\beta \rangle = f(\beta) \text{ para todo } f \in H^2(\mathbb{C}_+). \quad (10)$$

Sea $\varphi : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$ un mapa holomorfo. Entonces, el *operador de composición con símbolo* φ , es el operador lineal (no necesariamente limitado) definido por

$$C_\varphi f = f \circ \varphi, \text{ para cada } f \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Elliott y Jury probaron que φ induce un operador continuo C_φ sobre $H^2(\mathbb{C}_+)$ si y solamente si $\varphi(\infty) = \infty$ y el siguiente límite existe y es finito

$$\varphi'(\infty) := \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{\varphi(w)}. \quad (11)$$

Adicionalmente, ellos mostraron que $\|C_\varphi\| = \sqrt{\varphi'(\infty)}$, ver [4]. Por otro lado, Matache [6] probó que los únicos mapas fraccionales lineales de \mathbb{C}_+ que inducen un operador de composición continuo sobre $H^2(\mathbb{C}_+)$ son los *mapas afines*

$$\varphi(w) = aw + b, \quad (12)$$

donde $a > 0$ y $\operatorname{Re}(b) \geq 0$.

Un mapa afin φ es llamado *parabólico* si $a = 1$ y es un *automorfismo parabólico* si adicionalmente $\operatorname{Re}(b) = 0$. Por otro lado, φ es llamado *hiperbólico* si $a \neq 1$ y es un *automorfismo hiperbólico* si adicionalmente $\operatorname{Re}(b) = 0$. Los mapas hiperbólicos que no son automorfismos son de la forma: $\varphi(w) = aw + b$ con $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ y $\operatorname{Re}(b) > 0$. Por simplicidad, φ es llamada de *hiperbólico de tipo I* si $a \in (0, 1)$ y $\operatorname{Re}(b) \geq 0$. Similarmente, φ es llamado de *hiperbólico de tipo II* si $a \in (1, \infty)$ y $\operatorname{Re}(b) \geq 0$.

En 2020, Noor y Severiano obtuvieron el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea $\varphi(w) = aw + b$ con $a > 0$ y $\operatorname{Re}(b) \geq 0$. Entonces

1. C_φ es normal si y solamente si $a = 1$ o $\operatorname{Re}(b) = 0$.
2. C_φ es autoadjunto si y solamente si $a = 1$ y $b \geq 0$.
3. C_φ es unitario si y solamente si $a = 1$ y $\operatorname{Re}(b) = 0$.

El resultado previo será de gran utilidad para estudiar propiedades dinámicas para el operador C_φ . El resultado principal de la charla es el siguiente:

Teorema 2 (Álvarez-Henríquez). Sea $\varphi(w) = aw + b$ un mapa sobre \mathbb{C}_+ con $a > 0$ y $\operatorname{Re}(b) \geq 0$. Entonces, C_φ tiene la propiedad de sombreado positiva si y solamente si φ es un automorfismo hiperbólico o un mapa hiperbólico de tipo II (no automorfismo).

Referencias

- [1] Álvarez, C. F., and Henríquez-Amador, J. Dynamical properties for composition operators on $H^2(\mathbb{C}_+)$. arXiv preprint arXiv:2306.06006 (2023).
- [2] Bayart, F., and Matheron, E. Dynamics of linear operators, vol. 179 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] Bernardes, Jr., N. C., Cirilo, P. R., Darji, U. B., Messaoudi, A., and Pujals, E. R. Expansivity and shadowing in linear dynamics. J. Math. Anal. Appl. 461, 1 (2018), pp. 796-816.
- [4] Elliott, S., and Jury, M. T. Composition operators on Hardy spaces of a half-plane. Bull.Lond. Math. Soc. 44, 3 (2012), pp. 489-495.
- [5] Matache, V. Composition operators on Hardy spaces of a half-plane. Proc. Amer. Math. Soc. 127, 5 (1999), pp. 1483-1491.
- [6] Matache, V. Invertible and normal composition operators on the Hilbert Hardy space of a half-plane. Concr. Oper. 3, 1 (2016), pp. 77-84.
- [7] Schroderus, R. Spectra of linear fractional composition operators on the Hardy and weighted Bergman spaces of the half-plane. J. Math. Anal. Appl. 447, 2 (2017), pp. 817-833.

Sobre la continuidad de los atractores de sistemas dinámicos

Autor: Jorge Armando Reyes Vásquez
Universidad de Córdoba / UMH de Elche, España
E-mail: jorgereyesv@correo.unicordoba.edu.co

Resumen: En esta charla vamos a estudiar la convergencia de los atractores de tipo “pullback” de sistemas dinámicos asintóticamente autónomos al atractor del problema autónomo límite, en el caso de procesos univaluados y comentaremos un poco sobre el estado del arte en el caso multivaluado, es decir, cuando no hay unicidad del problema de Cauchy. Este es un trabajo en conjunto con José Valero Cuadra.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, atractor global, atractor “pullback”, sistemas multivaluados, sistemas asintóticamente autónomos, métrica de Hausdorff.

Introducción

Actualmente se conocen ciertos resultados que prueban que las secciones de los atractores de tipo pullback convergen en la semidistancia de Hausdorff al atractor del semigrupo límite ([1], [2], [3], [4], [5]). Estos resultados teóricos se han aplicado a ecuaciones de reacción-difusión y a otras ecuaciones parabólicas. Algunos de estos resultados se han extendido a procesos multivaluados ([5], [6], [8]). Sin embargo, no se conocen resultados referentes a la convergencia en la distancia de Hausdorff, para lo cual se necesita un conocimiento más preciso de la estructura del atractor.

Referencias

- [1] Ball J. M. “*Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations.*” *Mechanics: From Theory to Computation: Essays in Honor of Juan-Carlos Simo*. New York, NY: Springer New York, 2000. 447-474.
- [2] Carvalho, Alexandre, José A. Langa, and James Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. Vol. 182. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Cui, Hongyong. “*Convergences of asymptotically autonomous pullback attractors towards semigroup attractors.*” *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* 24.8 (2019): 3525-3535.
- [4] Kloeden, Peter E., and Jacson Simsen. “*Attractors of asymptotically autonomous quasi-linear parabolic equation with spatially variable exponents.*” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 425.2 (2015): 911-918.
- [5] Li, Yangrong, Lianbing She, and Renhai Wang. “*Asymptotically autonomous dynamics for parabolic equations.*” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 459.2 (2018): 1106-1123.
- [6] Rita de Cássia, D. S., Alexandre N. Carvalho, and José Valero. “*A non-autonomous scalar one-dimensional dissipative parabolic problem: the description of the dynamics.*” *Nonlinearity* 32.12 (2019): 4912.
- [7] Robinson, James C. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*. Vol. 28. Cambridge University Press, 2001.
- [8] Valero, José. “*Characterization of the attractor for nonautonomous reaction-diffusion equations with discontinuous nonlinearity.*” *Journal of Differential Equations* 275 (2021): 270-308.

Análisis

Análisis de Fourier e integración generalizada: el caso de dos teoremas fundamentales

Autor: Francisco J. Mendoza Torres
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
E-mail: francisco.mendoza@correo.buap.mx

Resumen: Haremos un repaso sobre algunas integrales, desde las creadas por Newton y Leibniz, y la estrecha relación con el desarrollo de Fourier. En particular enfatizaremos la evolución del Lema de Riemann-Lebesgue y de Dirichlet-Jordan.

Palabras & frases clave: Transformada de Fourier, Integración Generalizada, Integral de Henstock-Kurzweil, Lema de Riemann-Lebesgue, Teorema de Dirichlet-Jordan.

The New Fractal derivative, some results

Autor: Miguel Vivas-Cortez
Pontificia Universidad Católica del Ecuador
E-mail: mjvivas@puce.edu.ec

Resumen: The fractional derivative has captured the interest of researchers in the last and present century, and the impact of fractional calculus in both pure and applied mathematics has begun to increase substantially during the last two decades (see [4]-[7]). In this work we carry out a review of the Hausdorff derivative, which relates the Hausdorff measure with fractal geometry, this derivative also known as the Chen derivative was proposed by the mathematician Wen Chen, as well as the Chen integral suggested by the same author in 2018 (see [1]) to develop a three-dimensional diffusion model for fractal porous medium [2]. We also present results associated with the new fractal derivative proposed by Sadek and Alaoui in 2022 (see [3]), especially emphasizing the properties of the exponential fractal derivative, the exponential fractal integral, and the fractal Laplace transform.

Keywords: Fractal Derivative, Rolle Theorem, Hausdorff Derivative.

References

- [1] Chen, W., Hei. X., Sun. H, and Hu, D. (2018) Stretched exponential stability of nonlinear Hausdorff dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractal*, 109, 259-264.
- [2] Cai, W., Chen, W., and Wang, F.(2018) Three-dimensional Hausdorff derivative diffusion model for isotropic/anisotropic fractal porous media. *Thermal Science*, 22 (Suppl. 1),1-6.
- [3] Alaoui, H., Sadek, L. A new definition of the fractal derivative with classical properties. 2022. HAL.
- [4] Guzman, P., Lugo, L., Nápoles Valdés, J., and Vivas-Cortez, M. (2020). On a new generalized integral operator and certain operating properties. *Axioms*, 9(2), 69.
- [5] Vivas-Cortez, M., Nápoles Valdés, J., Hernández, J., Velasco, J. and Larreal, O. (2021). On nonconformable fractional Laplace transform. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 15(4), 403–409.
- [6] Vivas-Cortez, M., Lugo, L., Nápoles Valdés, J, Samei, M.E. (2022). A Multi-Index Generalized Derivative; Some Introductory Notes. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 16(6), 883–890.
- [7] Vivas-Cortez, M., Kashuri, A., Liko, R. Hernández J.E. (2020).Some New q -integral inequalities using generalized quantum Montgomery identity via preinvex functions. *Symmetry* 12(4) 553 <https://doi.org/10.3390/sym12040553>

Operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares

Autor: Margot Salas-Brown
Universidad Sergio Arboleda
E-mail: margot.salas@usa.edu.co

Resumen: Los operadores estrictamente singulares surgen del estudio de las perturbaciones para operadores semi-Fredholm. Estos operadores pueden verse como una generalización del concepto clásico de operador compacto y fueron introducidos en 1958 por Kato [2]. Los operadores estrictamente singulares, al ser una generalización de los compactos, poseen muchas propiedades similares a las que satisfacen estos, por ejemplo, son un subespacio cerrado de los operadores lineales y acotados $\mathcal{L}(X, Y)$ o forman un ideal de operadores. Con respecto a nociones de dualidad, es conocido que un operador es compacto si y solo si su adjunto lo es; sin embargo, esta propiedad no es cierta para los operadores estrictamente singulares. En 1965, Pelczynski [3] introduce el concepto de operador estrictamente cosingular, el cual es la noción dual del concepto de operador estrictamente singular. Pelczynski mostró que si el adjunto de T , T^* , es estrictamente cosingular, entonces T es estrictamente singular, y si T^* es estrictamente singular, entonces T es estrictamente cosingular [3].

En esta charla, hablaremos de algunas propiedades de los operadores estrictamente singulares y cosingulares. También, abordaremos los operadores Φ -singulares y Φ -cosingulares, los cuales pueden ser considerados como una generalización de estas clases de operadores, y exhibiremos algunas propiedades de dualidad relacionadas con estas [1].

Palabras & frases clave: Ideales de operadores, operador adjunto, operador estrictamente singular, operador estrictamente cosingular.

Referencias

- [1] González, Manuel, and Margot Salas-Brown. Two classes of operators related to the perturbation classes problem. *Advances in Operator Theory* 8.3 (2023): 41.
- [2] Kato, Tosio. Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. *Journal d'Analyse Mathématique* 6.1 (1958): 261-322.
- [3] Pełczyński, A. Projections in certain Banach spaces. *Studia Mathematica* 2.19 (1960): 209-228.

Operador tridiagonal entre espacios de sucesiones con pesos

Autores: Julio C. Ramos Fernández
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 E-mail: jramosf@udistrital.edu.co

Resumen: Dada tres sucesiones $\mathbf{a} = (a_k)$, $\mathbf{b} = (b_k)$ y $\mathbf{c} = (c_k)$, el operador tridiagonal actuando sobre un espacio de Banach de sucesiones X es aquel que aplica una sucesión $\mathbf{x} = (x_k) \in X$ en la sucesión $\mathbf{y} = (y_k) = T_{a,b,c}(\mathbf{x})$ definida por:

$$y_k = b_{k-1}x_{k-1}a_kx_k + c_kx_{k+1},$$

donde se define $b_0 = x_0 = 0$ y que se obtiene al aplicar una matriz tridiagonal infinita al vector $\mathbf{x} = (x_k)$. Esta transformación ha sido estudiada recientemente por Caicedo et. al. [2] en el contexto de espacios l^2 con peso y es una generalización del famoso operador de multiplicación el cual proviene cuando $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, la sucesión nula y la cual ha sido estudiado ampliamente por muchos autores (véase [1] y las referencias allí). En la charla caracterizamos la continuidad, la compacidad y estimamos la norma esencial de este operador cuando actúa sobre el espacio l^∞ con peso de todas las sucesiones reales $\mathbf{x} = (x_k)$ tales que

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty, \omega} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \omega_k,$$

donde $\omega = (\omega_k)$ es una sucesión peso que satisface $\omega_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Más precisamente, desarrollamos algunos resultados del artículo [3].

Palabras & frases clave: Espacios de sucesiones, operador tridiagonal, compacidad, norma esencial.

Referencias

- [1] J. C. Ramos-Fernandez & M. Salas-Brown (2017). On Multiplication operators acting on Köthe sequence spaces. *Afr. Mat.* **28** (3-4): 661 - 667.
- [2] A. Caicedo, J. C. Ramos-Fernandez and M. Salas-Brown (2023). On the compactness and the essential norm of operators defined by infinite tridiagonal matrices. *Concrete Operators* **10**, no 1, pp. 20220143.
- [3] J. C. Ramos-Fernandez, C. J. Ramos-Salas and M. Salas-Brown (2024). On the essential norm of tridiagonal operators between weighted Orlicz and weighted l^∞ spaces. *Submitted*.

A recent review on fractional difference equations and (N, λ) -periodic functions

Autor: Stiven Díaz
 Universidad de la Costa
 E-mail: sdiaz47@cuc.edu.co

Abstract: In this talk, we will delve into the theory and explore the latest developments on fractional difference equations and (N, λ) -periodic functions. We will recall the derivation of various fractional operators and their applications. Additionally, we will examine the definition and fundamental properties of (N, λ) -periodic functions, detailing their characteristics and relevance in the context of fractional equations.

Keywords: (N, λ) -periodic functions, Fractional Difference Equations, the Riemann-Liouville fractional difference operator, the Caputo fractional difference operator.

Introduction

In this presentation, we will delve into the theory and explore the latest developments on fractional difference equations and (N, λ) -periodic functions.

Initially, we will revisit the derivation of two fundamental operators essential to our exploration: the Caputo fractional difference operator ${}_c\Delta^\alpha$ and the Riemann-Liouville fractional difference operator ${}_R\Delta^\alpha$. These operators play pivotal roles in understanding the behavior of fractional difference equations. Specifically, ${}_c\Delta^\alpha f(n)$ is defined as $\Delta^{-(1-\alpha)}\Delta f(n)$, while ${}_R\Delta^\alpha f(n)$ is defined as $\Delta\Delta^{-(1-\alpha)}f(n)$. Here, $\Delta^{-\alpha}f(n)$ is given by the sum $\sum_{j=-\infty}^n k^\alpha(n-j)f(j)$, with $k^\alpha(n)$ represented by $\Gamma(\alpha+n)/(\Gamma(\alpha)n!)$, and $\Delta f(n)$ indicating $f(n+1) - f(n)$ (see [1]).

Furthermore, we will reintroduce the concept of the Mittag-Leffler sequence $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ and the discrete scaled Wright function $\varphi_{\alpha,\beta}$, where $0 < \alpha < 1$ and $0 \leq \beta$. The Mittag-Leffler sequence is defined and studied in the references [4],

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(\sigma, n) := \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j k^{\alpha j + \beta}(n), n \in \mathbb{N}_0,$$

while the discrete scaled Wright function is defined by the expression given in Equation 13 (see [1, 4]).

$$\varphi_{\alpha,\beta}(n, j) := \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^i k^{\beta - \alpha i}(n). \quad (13)$$

Some properties of the discrete scaled Wright function can be deduced from properties of the Lévy α -stable distribution (see [3]).

On the other hand, we define and investigate a class of vector-valued functions defined on \mathbb{Z} called (N, λ) -periodic discrete functions, serving as discrete analogs to the vector-valued (ω, c) -periodic functions defined in [5]. Notably, the (N, λ) -periodic discrete functions encompass discrete periodic, anti-periodic, Bloch-periodic, and unbounded functions, each characterized by distinct properties and behaviors (see [2]).

Finally, we study the regularity of solutions to both linear and nonlinear fractional difference equations within the framework of $\mathbb{P}_{N,\lambda}(\mathbb{Z}, X)$, where X represents a suitable function space. Here, A is a closed linear operator with domain $D(A)$ defined on X . The collection of sequences with the same (N, λ) -period is denoted by $\mathbb{P}_{N,\lambda}(\mathbb{Z}, X)$.

References

- [1] Alvarez, E., Díaz, S., & Lizama, C. (2022). Existence of (N, λ) -periodic solutions for abstract fractional difference equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(1), 47.
- [2] Alvarez, E., Díaz, S., & Lizama, C. (2019). On the existence and uniqueness of (N, λ) -periodic solutions to a class of Volterra difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2019, 1-12.
- [3] Alvarez, E., Díaz, S., & Lizama, C. (2022). C-Semigroups, subordination principle and the Lévy α -stable distribution on discrete time. *Communications in Contemporary Mathematics*, 24(01), 2050063.
- [4] Abadias, L., Alvarez, E., & Díaz, S. (2022). Subordination principle, Wright functions and large-time behavior for the discrete in time fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 507(1), 125741.
- [5] Alvarez, E., Gómez, A., & Pinto Jiménez, M. (2018). (ω, c) -periodic functions and mild solutions to abstract fractional integro-differential equations.

Espacios L_p y transformada de Laplace

Autor: Héctor Camilo Chaparro
 Universidad de Cartagena
 E-mail: hchapparrog@unicartagena.edu.co

Resumen: En esta charla, estudiaremos la acotación de la transformada de Laplace $\mathcal{L} : L_p([0, \infty)) \rightarrow L_p(A)$ ($p \geq 1$) para los casos $A = [0, \infty)$, $A = [1, \infty)$ y $A = [0, 1]$. Veremos ejemplos para los casos en los cuales \mathcal{L} no es acotada. Presentaremos, de manera detallada, los resultados que aparecen en [3].

Palabras & frases clave: Transformada integral, Transformada de Laplace, Espacios de Lebesgue.

Introducción

La transformada de Laplace \mathcal{L} es un operador integral lineal clásico, definido para cada función apropiada f en $[0, \infty)$ por

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(s) ds, \quad t \in (0, \infty).$$

La transformada de Laplace se utiliza ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Por lo tanto, es una herramienta útil no solo para los matemáticos, sino también para los físicos e ingenieros. También es útil en la Teoría de la Probabilidad (ver [1], [5] y [6]).

Por alguna razón (desconocida), el estudio de la acotación de la transformada de Laplace ha sido descuidado. Existen pocos documentos disponibles al respecto. En este sentido, solo se lograron encontrar las referencias [2] y [4], en las cuales los autores establecen algunos resultados sobre la acotación de la transformada de Laplace, pero no de manera detallada.

Teniendo en cuenta lo anterior, estudiaremos la acotación de la transformada de Laplace entre espacios de Lebesgue L_p . Veremos que:

1. $\mathcal{L} : L_p([0, \infty)) \rightarrow L_p([0, \infty))$ es acotada solo si $p = 2$.
2. $\mathcal{L} : L_p([0, \infty)) \rightarrow L_p([1, \infty))$ es acotada solo si $p > 2$.
3. $\mathcal{L} : L_p([0, \infty)) \rightarrow L_p([0, 1])$ es acotada solo si $1 < p < 2$.

Referencias

- [1] Abate, J. and Whitt, W., *An operational calculus for probability distributions via Laplace transforms*, Adv. in Appl. Probab. 28 (1996), no. 1, 75-113.
- [2] Buriánková, E., Edmunds, D. and Pick, L., *Optimal function spaces for the Laplace transform*, Rev. Mat. Complut. 30 (2017), no. 3, 451-465.
- [3] Castillo R.E., Chaparro H.C., Ramos-Fernández J.C., *L_p boundedness of the Laplace transform*. Under review.
- [4] Goldstein, G. R., Goldstein, J. A., Metafunne, G., and Negro, L., *The weighted Laplace transform*, Contemp. Math., 733, Amer. Math. Soc., 2019.
- [5] Ndiku, Z., *Laplace Transform in Probability Distributions and in Pure Birth Processes*, Master's thesis (2015), University of Nairobi, Nairobi, Kenia. Retrieved from <http://erepository.uonbi.ac.ke/handle/11295/95040>
- [6] Rossberg, A. G., *Laplace transforms of probability distributions and their inversions are easy on logarithmic scales*, J. Appl. Probab. 45 (2008), no. 2, 531-541.

Compacidad del operador de Rhaly en espacios de sucesiones

Autores: Helen Lorena Quevedo Enciso¹, Julio C. Ramos Fernández²
Pontificia Universidad Javeriana¹, Universidad Distrital Francisco José de Caldas²
E-mail: hlquevedo@javeriana.edu.co, jcramosf@udistrital.edu.co

Resumen: Dada una sucesión $\mathbf{a} = (a_k)$ el operador de Rhaly actuando sobre un espacio de Banach de sucesiones X es aquel, que aplica una sucesión $\mathbf{x} = (x_k) \in X$ en la sucesión $\mathbf{y} = (y_k) = R_a(\mathbf{x})$ definida por:

$$y_k = a_k \sum_{j=1}^k x_j.$$

Esta transformación es una generalización del famoso operador de Cesàro (vea [1]) que se obtiene cuando $a_k = \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Esta aplicación se obtiene por la multiplicación de una matriz triangular inferior infinita por una sucesión tal como se puede ver a continuación:

$$R_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ a_2(x_1 + x_2) \\ a_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{y}.$$

En la charla caracterizamos la continuidad y la compacidad de este operador cuando actúa sobre ciertos espacios de sucesiones tales como c (sucesiones convergentes), h (espacio de Hanh), ℓ_p , entre otros (veáse [2]). Adicionalmente, veremos que muchos de estos resultados son consecuencias de un nuevo teorema que aparece en [3].

Palabras & frases clave: Matrices infinitas, Espacios de sucesiones, Compacidad, Operador de Rhaly.

Referencias

- [1] S. V. Astashkin and L. Maligranda (2009). Structure of cesaro function spaces. *Indagationes Mathematicae*, 20(3):329–379.
- [2] S. R. El-Shabrawy (2022). Compactness criteria and spectra of some infinite lower triangular matrices. *Filomat*, 36 (17):5913–5933.
- [3] H. L. Quevedo, J. C. Ramos-Fernández and M. Salas-Brown (2024). A new criterion for the compactness of operators acting on Köthe sequence spaces. *Pre-print*.

El problema de Cauchy sobre Adeles finitos

Autores: Julian A. Garnica
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: julian2228072@correo.uis.edu.co

Resumen: El objetivo de la charla es mostrar la construcción del problema de Cauchy y algunas soluciones variando el operador pseudo-diferencial.

Palabras & frases clave: Adeles finito, operador pseudo-diferencial, transformada de Fourier.

Introducción

El anillo de adeles finito \mathbb{A}_f de los números racionales \mathbb{Q} se define clásicamente como el producto directo restringido de los campos \mathbb{Q}_p con respecto a los subanillos compactos y abiertos maximales de \mathbb{Z}_p , es decir

$$\mathbb{A}_f = \left\{ (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para todos menos un número finito de primos } p \in \mathbb{P} \right\},$$

con una topología dada por la topología de producto directo restringido.

Se denota el espacio de todas las funciones Schwartz-Bruhat sobre \mathbb{A}_f por $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$. Para $\varphi \in \mathcal{D}$, se define la transformada de Fourier

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{A}_f} \varphi(x) \chi(-\xi \cdot x) dx.$$

Un operador de la forma $D^\alpha \varphi = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|_f^\alpha \mathcal{F}\varphi)$, $\alpha > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$, es llamado un operador pseudo-diferencial con símbolo $|\xi|_f^\alpha$.

El problema de Cauchy es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D_x^\alpha u(x,t) = F(x,t), & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Referencias

- [1] Aguilar-Arteaga, Victor A., Manuel Cruz-López, and Samuel Estala-Arias. "Non-Archimedean analysis and a wave-type pseudodifferential equation on finite adèles." *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* 11.3 (2020): 1139-1181.
- [2] Zúñiga-Galindo, W. A. "Parabolic Equations and Markov Processes Over p-Adic Fields." *Potential Analysis* 2.28 (2008): 185-200.

Álgebra

Conjuntos Sidon bidimensionales y modelos de sincronización

Autores: Carlos Alberto Trujillo Solarte
Universidad del Cauca
E-mail: trujillo@unicauca.edu.co

Resumen: Hay varios problemas que aparecen en aplicaciones a radar, sonar, alineación física y sincronización (tiempo-posición), que pueden formularse en términos de modelos bidimensionales de unos y ceros para los cuales la función autocorrelación (ambigüedad) tiene valores mínimos fuera de fase. Un contexto general consiste en construir un arreglo en dimensión dos de celdas en blanco (ceros) y celdas en negro (unos) de tal forma que cualquier par de vectores que conecten dos celdas en negro del arreglo sean distintos. El ejemplo original que apareció en un problema sonar práctico fue descrito por John P. Costas en los años setenta.

Por otro lado, dados dos grupos conmutativos G y H , escritos aditivamente, y dos subconjuntos A de G y B de H , una función F de A en B se llama función Sidon si su gráfica es libre de paralelogramos (no es posible trazar un paralelogramo entre sus puntos).

Desde el contexto de funciones y conjuntos Sidon, en esta conferencia presentaré una visión sobre rectángulos Golomb, secuencias sonar, permutaciones Costas y otros patrones bidimensionales relacionados.

Palabras & frases clave: Arreglos Costas, Secuencias Sonar, Reglas y rectángulos Golomb, Conjuntos y funciones Sidon.

Referencias

- [1] Golomb, Solomon, and Herbert Taylor. "Two-dimensional synchronization patterns for minimum ambiguity." *IEEE Transactions on Information Theory* 28.4 (1982): 600-604.
- [2] Etzion, Tzvi. "Problems on two-dimensional synchronization patterns." *International Conference on Coding and Cryptology*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] Solarte, Carlos Alberto Trujillo. "Conjuntos Sidon en Contextos Finitos." *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* 47.185 (2023): 1024-1044.

Noncommutative differential geometry of quantum planes

Authors: Andrés Alejandro Rubiano Suárez¹, Milton Armando Reyes Villamil
 Universidad ECCI¹, Universidad Nacional de Colombia¹
 E-mail: arubianos@unal.edu.co¹

Abstract: Riemannian geometry (or elliptic geometry) is one of the geometries that does not accept the fifth postulate of Euclid, the one on parallel lines, and that also modifies the second postulate. This allows some results of Euclidean geometry to be invalid for Riemannian geometry (parallel lines, sums of interior angles of a triangle, among others). Although this non-Euclidean geometry is attributed to Riemann, Gauss was the first to talk about the intrinsic metric from their embedding (1827). What Gauss did was prove the egregium theorem, which says that the total curvature can be calculated only with the intrinsic metric.

Riemann, in 1854, was defining surfaces using a very abstract path to arrive at Riemannian metric, which made them free of any embedding or immersion (see [3]). But not only that. In this same year, Riemann gave his famous conference at the Colloquium of the Faculty of Philosophy at Göttingen. It is said that this conference was the most important for differential geometry and in which his teacher Gauss was present. These new ideas and concepts of Riemann, generalized the geometry of surfaces that his teacher Gauss had initiated. This later led to the modern concept of Riemannian manifold (see [4]).

The applications of Riemannian geometry are immense. One of the most important is GPS location. Since the geometry of the Earth is not flat, the tools of Riemannian geometry must be used to understand and use measurements on the globe (see [9]).

During the last decades, many properties of this geometry have been studied. In fact, there are many open problems in Riemannian geometry, the solution of which is being strongly sought by many geometers today. For this reason, it can be said that Riemannian geometry is one of the branches with the most influence and the most work in mathematics. However, many of these problems are sought starting from classical Riemannian geometry (here, *classical* will refer to the commutative one). At this point we want to study a generalization of classical Riemannian geometry, to a non-commutative one; or, as it is known in the literature, a quantum Riemannian geometry.

Keywords: Quantum planes, derivations, non-commutative geometry.

Introduction

The idea is to be able to expand the fundamental properties of classical Riemannian geometry to a non-commutative form, as long as these new definitions coincide with the classical ones, when we talk about the commutative case. In this panorama, two different paths will be taken for the generalization of said geometry: through Lie groupoids and Lie algebroids; and through Hopf algebras. For path of Lie groupoids and Lie algebroids, we see [8]. For this, the groupoid concept and everything that it carries with it is defined, that is, morphisms, subgroupoids, quotients, transitivity, among other things.

In order to arrive at a differential construction by this method, it is necessary to have clear topological concepts. For this reason, it defines the topological themes with the groupoids. These include: representations in topological groupoids, admissible sections, monodromy groupoid and locality, and more. When we keep all of this in mind, we can define the differentiability in Lie groupoids. However, this is not sufficient for a generalization of the geometry of commutative case. It is necessary to define the concept of Lie algebroid and how it is calculated in a differential groupoid. With these objects defined and their relations established, we can arrive at the construction of more complete geometry. Starting with transitive Lie algebroid theory, observing its cohomology, carrying out non-abelian extensions of these, studying flat connections and spectral sequences. Thanks to this, we would have a path for non-commutative Riemannian geometry. However, it is not the only method. Now, we see other path that will be taken into account

For path of Hopf algebras, we study [6], which specifies how it generalizes the definitions of classical geometry to the non-commutative case. Furthermore, it goes further and deals with many of the classical properties in their non-commutative counterpart. Undoubtedly, new concepts appear that only apply to the quantum case, since for the classic it would be trivial or there would be no gain. The way to define is given by non-commutative algebras. Thanks to these, the close relationship between geometry and algebra may be more evident. To do this, it is possible to see which is the commutative algebra that classical Riemannian geometry deals with, in order to be able to change it to a non-commutative one.

Inevitably, definitions such as: **functions on a variety, open sets, local coordinates, commutativity between differentials with functions**, among others, do not make sense in the quantum case. Therefore, they are generalized with other types of objects. The most prominent algebras in quantum Riemannian geometry are Hopf algebras. With them, we can arrive at generalizations of the curvature in a surface, connections in classical Riemannian geometry (for example, the most important is the Levi-Civita connection), among others.

Cohomology and the structure of bundles and fibers play a very important role in generalizing classical notions. And it doesn't just stop here, because to be able to talk about quantum principal bundles, one must go beyond the Hopf algebras; specifically, it must have the Hopf-Galois extensions.

Summarizing, in order to form a generalization of classical Riemannian geometry, tools of non-commutative algebra, algebraic geometry, category theory, differential geometry, among others, must be used. It is a subject with a lot of mathematical richness.

Quantum Riemannian geometry also has its remarkable applications, this time in the field of physics. In [6], Chapters 8 and 9, it talks about the applications of Riemannian geometry in quantum spacetime. This brings up topics like the quantum black-hole wave operator, Hermitian Riemannian geometry, geometric realization of spectral triples, and so on (see [2], [1], [5] and [7]).

The previous topics can be treated as applications of non-commutative Riemannian geometry, as mentioned before. However, it could be said that, through these works, the new notions encompassed by quantum Riemannian geometry were built. Having these two forms of generalization, they will be used to study quantum Riemannian geometry in certain types of non-commutative algebras.

References

- [1] Amelino-Camelia, G. and Majid, S., Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts. *Internat. J. Modern Phys. A* **15**(27) (2000) 4301–4323.
- [2] Albuquerque, H. and Majid, S., Quasialgebra structure of the octonions. *J. Algebra* **220**(1) (1999) 188–224.
- [3] Berger, M., Riemannian geometry during the second half of the twentieth century. *American Mathematical Soc.* **17** (2000).
- [4] Berger, M., A panoramic view of Riemannian geometry. *Springer* (2012).
- [5] Beggs, E. and Majid, S., Gravity induced from quantum spacetime. *Classical Quantum Gravity* **31**(3) (2014) 035020.
- [6] Beggs, E. J., Majid, S.: Quantum Riemannian Geometry. Berlin, Springer (2020).
- [7] Doplicher, S. and Fredenhagen, K. and Roberts, J., The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Comm. Math. Phys.* **172**(1) (1995) 187–220.
- [8] Mackenzie, K. and Kirill, M. and Mackenzie, KC., Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry. *Cambridge university press* (1987).
- [9] Teunissen, P. J. and Kleusberg, A., GPS for Geodesy. *Springer Science & Business Media* (2012).

Grupos cuánticos y sus acciones

Autor: Fabio Calderón
Universidad de los Andes
E-mail: f.calderonmateus@uniandes.edu.co

Resumen: En esta charla exploramos una conexión innovadora entre los métodos de las teorías de categorías y de representaciones utilizados para comprender las acciones sobre álgebras. Estos hallazgos representan una generalización poderosa de los resultados clásicos para grupos y álgebras de Lie, y tienen implicaciones sustanciales para el estudio de grupos cuánticos en matemáticas y física.

Palabras & frases clave: Grupos cuánticos, álgebras de Hopf, simetrías cuánticas.

Introducción

Nuestra motivación se basa en el siguiente resultado clásico: para un campo K y un grupo G , una K -álgebra A es un G -módulo-álgebra (es decir, un monoide en la categoría monoidal de G -módulos) si, y solo si, existe un homomorfismo de grupos desde G hasta el grupo de K -automorfismos de álgebra $\text{Aut}_{\text{Alg}}(A)$.

En trabajo reciente conjunto con H. Huang, E. Wicks, y R. Won [1], extendemos este resultado al contexto de grupos y grupoides cuánticos. Para ciertas álgebras de Hopf H , tanto clásicas como débiles, identificamos un objeto categórico destacado S , que comparte la misma estructura que H , tal que se cumple lo siguiente: una K -álgebra A es un H -módulo-álgebra (es decir, un monoide en la categoría monoidal de H -módulos) si, y solo si, existe un morfismo preservador de la estructura algebraica desde H hasta S .

Esto abre nuevas perspectivas para entender las acciones y simetrías en el ámbito no-conmutativo, proporcionando herramientas conceptuales valiosas para la investigación en el campo de las simetrías cuánticas.

Referencias

[1] Calderón, Fabio, et al. "Cocommutative Hopf-like actions on algebras." *arXiv preprint arXiv:2209.11903* (2022).

Descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p de Grupos Pro- p

Autor: Jesus E. Berdugo

Universidad del Atlántico

E-mail: jeberdugo@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen: En esta presentación se explicará las descomposiciones de un grupo pro- p G como un producto libre pro- p con un subgrupo procíclico infinito amalgamado o como una extensión HNN con un subgrupo procíclico infinito asociado, y estudiaremos la versión pro- p del Teorema 2.1 de Rips y Sela (Annals of Mathematics; 1997), y la versión pro- p y pro-2 del Teorema 3.6 de Rips y Sela (Annals of Mathematics; 1997). También, mostraremos algunos resultados que muestran la utilidad de la prueba de estos teoremas en su versión pro- p .

Palabras & frases clave: Grupo pro- p , producto libre pro- p amalgamado, pro- p HNN-extensión.

Introducción

En 1997, Z. Sela en el artículo [3], “tradujeron”, la noción de las sub-variedades características JSJ (Jaco-Shalen-Johanson) de topología tridimensional al contexto de grupos hiperbólicos, obteniendo una descomposición canónica para grupos hiperbólicos, que se llamó descomposición canónica JSJ (en [3]). Esta descomposición canónica “tiene”, todas las pequeñas descomposiciones cíclicas (esenciales) de un grupo hiperbólico libremente indescomponible y libre de torsión. E. Rips y Z. Sela en [2] estudiaron la descomposición sobre un subgrupo cíclico-infinito (\mathbb{Z} -descomposición) de grupos finitamente generados como un producto libre amalgamado o una HNN-extensión. Para poder comprender mejor todas las descomposiciones sobre \mathbb{Z} de un grupo G presentado finitamente, necesitaban estudiar cuidadosa y detalladamente la “interacción” entre cualquier par de descomposiciones elementales sobre \mathbb{Z} de G . Teniendo en cuenta que en una descomposición elemental sobre \mathbb{Z} de G , pueden ser un producto amalgamado libre $A *_Z B$ con un grupo cíclico-infinito amalgamado \mathbb{Z} o un HNN-extensión $HNN(A, \mathbb{Z}, t)$ con el subgrupo cíclico-infinito asociado \mathbb{Z} . Ahora supongamos que tenemos dos descomposiciones sobre \mathbb{Z} para G que son: $A_1 *_{c_1} B_1$ o $HNN(A_1, C_1, t_1)$, y $A_2 *_{c_2} B_2$ o $HNN(A_2, C_2, t_2)$, tal que $C_1 = \langle c_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle c_2 \rangle = C_2$. Con los árboles de Bass-Serre T_1 y T_2 respectivamente para la primera y segunda descomposición \mathbb{Z} (árboles de Bass-Serre definidos en [4, Sección 5.3]), decimos que estos descomposiciones sobre \mathbb{Z} son:

- Elíptico-Elíptico: Si c_1 estabiliza un vértice en T_2 y c_2 estabiliza un vértice en T_1 .
- Hiperbólico-Hiperbólico: Si c_1 no estabiliza el vértice en T_2 y c_2 no estabiliza el vértice en T_1 .
- Hiperbólico-Elíptico: Si c_1 no estabiliza un vértice en T_2 y c_2 estabiliza un vértice en T_1 .

Recordando que un grupo se puede descomponer libremente si se puede escribir como un producto libre con factores no triviales; en la Sección 2 de [2] en el Teorema 2.1 Rips-Sela demostraron el siguiente teorema:

Teorema: [2, Teorema 2.1] *Cualquier par de descomposiciones sobre \mathbb{Z} de un grupo que sea libremente indescomponible no puede ser elíptico-hiperbólico.*

Ahora un grupo G no se descompone sobre un grupo de orden 2, esto significa que G no se puede escribir como un producto libre amalgamado $A \amalg_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} B$, con subgrupo amalgamado de orden 2, o una extensión HNN $HNN(A, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, t)$, con grupo asociado de orden 2; en la tercera sección de [2] Rips y Sela prueban el siguiente teorema:

Teorema:[2, Teorema 3.6] *Sea G un grupo libremente indescomponible y que no se descompone sobre un grupo de orden 2, y G admite dos descomposiciones sobre \mathbb{Z} hiperbólicas-hiperbólicas en las que los subgrupos cíclicos-infinitos*

amalgamados (o asociados cuando es una extensión HNN) conmutan, entonces el grupo G es isomorfo a cualquiera de los siguientes grupos: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, o $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, o $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$.

El objetivo ahora es definir los objetos definidos en [2] para el caso pro- p , y demostrar la versión pro- p de los dos Teoremas [2, Teoremas 2.1 y Teorema 3.6] mencionados anteriormente. Para conseguir probar los siguientes Teoremas:

Teorema 1: *Sea G un grupo pro- p finitamente generado que no admite descomposición como un producto libre pro- p no trivial. Entonces, dos descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p de G son elípticas-elípticas o hiperbólicas-hiperbólicas.*

Este teorema es la versión pro- p del Teorema 2.1 de [2], agregamos la hipótesis de que el grupo G es pro- p finitamente generado la idea de la prueba fue diferente que en el caso abstracto porque en el caso abstracto usan firmemente el teorema de estructura [4, Teorema 13], y dicho teorema en la versión pro- p no siempre se cumple.

Cuando consideramos $p > 2$, primero probamos una Proposición que muestra cómo se ve el normalizador de un grupo que actúa hiperbólicamente, y luego el versión pro- p del Teorema 3.6 de [2] que dice:

Teorema 2: *Sea G un grupo pro- p finitamente generado que no se descompone como un producto libre pro- p no trivial, tal que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ o $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, y $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ o $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ son dos descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p -Hiperbólicas-Hiperbólicas para G . Supongamos que $N_G(C_1)$ no es procíclico. Entonces $G = N_G(C_1) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Además un resultado de la acción de dos descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p hiperbólicas-hiperbólicas en el Teorema:

Teorema 3: *Sea G un grupo pro- p finitamente generado que no es pro- p abeliano, y tampoco se descompone como un producto libre pro- p no trivial, tal que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ o $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, y $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ o $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$ son dos Descomposiciones sobre \mathbb{Z}_p hiperbólicas-hiperbólicas de G . Entonces, la acción de G en su árbol estándar pro- p S es 2-acilíndrica.*

Ahora considerando $p = 2$, primero mostramos una proposición que muestra los grupos para los cuales el normalizador es isomorfo.

Proposición 4: *Supongamos que $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ o $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, y $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ o $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, hay dos descomposiciones sobre \mathbb{Z}_2 Hiperbólica-Hiperbólica. Sea $1 \neq H_i \leq C_i$. Entonces $N_G(H_i)$ es isomorfo a uno de los siguientes grupos:*

- (i) Grupo procíclico infinito \mathbb{Z}_2 ;
- (ii) Grupo diédrico pro-2 infinito $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- (iii) Grupo abeliano pro-2 libre de rank 2 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
- (iv) Botella Klein pro-2 $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$;
- (v) Producto semidirecto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde la acción de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es por inversión, o
- (vi) Producto semidirecto $(\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Por último explicar la versión pro-2 del Teorema 3.6 de [2] (tenga en cuenta que obtenemos las completaciones pro-2 del caso abstracto):

Teorema 5: *Sea G un grupo pro-2 generado finitamente que no se descompone sobre un grupo de orden como máximo 2, con $G = A_1 \amalg_{C_1} B_1$ o $G = HNN(A_1, C_1, t_1)$, y $G = A_2 \amalg_{C_2} B_2$ o $G = HNN(A_2, C_2, t_2)$, son dos descomposiciones sobre \mathbb{Z}_2 Hiperbólicas-Hiperbólicas de G . Supongamos que $N_G(C_1)$ no es procíclico infinito ni diédrico pro-2 infinito. Entonces $G = N_G(C_1)$ es isomorfo a uno de los grupos pro-2 enumerados desde (iii) a (vi) de la **Proposición 4**.*

Para mayor información sobre los resultados y lo explicado, se podría consultar en [1].

Referencias

- [1] Jesus Berdugo and Pavel Zalesskii, Cyclic splittings of pro- p groups. arxiv.2307.08787.
- [2] E. Rips and Z. Sela (1997). *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, Annals of Mathematics , Jul., 1997, Second Series, Vol. 146, No. 1, pp. 53-109, Mathematics Department, Princeton University.
- [3] Z. Sela (1997). *Structure and Rigidity in (Gromov) Hyperbolic Groups and Discrete Groups in Rank 1 Lie Groups II*, GAFA, Geometric And Functional Analysis. Vol. 7, 561-593.
- [4] J-P. Serre (1980). *Trees*, Springer-Verlag, Berlin.

On simple Lie algebra in characteristic 2

Author: Carlos Rafael Payares Guevara
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: cpayares@utb.edu.co

Abstract: In this talk we are going to address the classification problem of finite-dimensional simple Lie algebras (and Lie 2-algebras) over an algebraically closed field of characteristic 2.

Keywords: Simple Lie algebras, Lie 2-algebra, characteristic 2, absolute toral rank.

Introduction

Simple Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic zero were classified by W. Killing (1888) and E. Cartan (1894). They have found four infinite families A_n , B_n , C_n , D_n and five exceptional cases E_6 , E_7 , E_8 , G_2 and F_4 (see[5]).

The classification problem for simple Lie algebra of finite dimension over an algebraically closed field F of characteristic $p > 3$ was solved by Block-Wilson-Premet-Strade. They exactly demonstrated that all simple Lie algebras of finite dimension over F are either classical (and hence Lie p -algebras) or isomorphic to Lie algebras of Cartan type corresponding to several differential forms, or Melikian algebras in the case $p = 5$, whose demonstration can be approached in the three volumes of Helmut Strade [2], [3] and [4].

After the classification of simple Lie algebras of finite dimension over a field of characteristic $p > 3$, the main problem still open in the category of Lie algebras of finite dimension is the classification of simple Lie algebras on an algebraically closed field of characteristic $p \in \{2, 3\}$.

References

- [1] Germán Benitez, Carlos R. Payares Guevara, Elkin O. Quintero Vanegas. On Lie 2-algebras of toral rank 3. <https://arxiv.org/abs/2406.07554>
- [2] H. Strade. Simple Lie Algebras over Fields of positive characteristic, volumen I: Structure Theory De Gruyter Expositions in Math Vol.38, Berlin, 2004.
- [3] H. Strade. Simple Lie Algebras over Fields of Positive characteristic, Volume II: Classifying the Absolute Toral Rank Two case. DeGruyter Expositions in math., vol. 42, Berlin, 2009.
- [4] H. Strade. Simple Lie Algebras over Fields of Positive characteristic, Volume III: Completion of the Classification, DeGruyter Expositions in Math., Vol. 57, Berlin, 2012.
- [5] N. Jacobson. Lie algebras, Interscience, New York, 1962.

Identidades minimales para subespacios del álgebra de Weyl

Autor: Carlos Arturo Rodríguez Palma
Universidad Industrial de Santander
E-mail: caropal@uis.edu.co

Resumen: En 2015 Benkart, Lopes y Ondrus estudiaron en varios artículos el álgebra asociativa unitaria de dimensión infinita A_h , generada por elementos x, y que satisfacen la relación $yx - xy = h$ para algún $0 \neq h \in \mathbb{F}[x]$ (Ver [3]); es decir el álgebra:

$$A_h = \mathbb{F}\langle x, y \rangle / \text{id}\{yx - xy - h\}.$$

En un trabajo junto al profesor Artem Lopatin, de la Universidad Estadual de Campinas (UNICAMP), investigamos las identidades polinomiales estándar y minimales para ciertos subespacios de A_h sobre un cuerpo infinito \mathbb{F} de característica arbitraria (Ver [1]). Además, describimos las identidades polinomiales de grado 4 para subespacios del álgebra de Weyl A_1 (Ver [2]).

Palabras & frases clave: Identidades polinomiales, álgebra de Weyl, característica positiva.

Referencias

- [1] A. Lopatin, C.A. Rodríguez Palma. Identities for subspaces of a parametric Weyl algebra. *Linear Algebra and its Applications*, **654** (2022).
- [2] A. Lopatin, C.A. Rodríguez Palma. Identities for subspaces of the Weyl algebra. *Submitted*.
- [3] G. Benkart, S.A. Lopes, M. Ondrus. A parametric family of subalgebras of the Weyl algebra I. Structure and automorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society* **367** (2015).

Geometría

Geometría de superficies dadas implícitamente en el haz de marcos ortonormales con la métrica de levantamiento de Wagner

Autores: Edward S. Becerra¹, Mikhail Malakhaltsev², Haimer A. Trejos³
Universidad Nacional de Colombia (sede Bogotá)¹, Universidad de los Andes², Universidade
Federal do Rio de Janeiro³
E-mails: esbecerrar@unal.edu.co¹, mikarm@uniandes.edu.co², aletrejosserna@gmail.com³

Resumen: Sean $SO(M, g)$ el espacio total del haz de marcos ortonormales de una variedad riemanniana bidimensional orientada (M, g) , G la métrica de levantamiento de Wagner sobre $SO(M, g)$ [1]. En [2] consideramos superficies horizontales y verticales de la variedad riemanniana $(SO(M, g), G)$, las superficies horizontales son secciones de $SO(M, g)$, y las superficies verticales son las preimágenes de curvas regulares de M . Hemos encontrado invariantes de estas superficies, en particular la curvatura media.

En nuestra charla vamos a considerar una superficie $\Sigma \subset SO(M)$ dada por la ecuación $F = 0$, donde $F : SO(M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave determinada por un campo tensorial t sobre la base M . En el caso general, Σ no es ni horizontal ni vertical. Vamos a mostrar como encontrar curvatura total externa y curvatura media de la superficie Σ en términos del campo t y considerar algunos ejemplos interesantes.

Palabras & frases clave: curvatura media, curvatura total externa, levantamiento de Wagner

Referencias

- [1] Arteaga B, José Ricardo, Mikhail Malakhaltsev, and Alexander Haimer Trejos Serna. “Isometry group and geodesics of the Wagner lift of a Riemannian metric on two-dimensional manifold.” *Lobachevskii Journal of Mathematics* 33 (2012): 293-311.
- [2] Becerra, E. S., M. Malakhaltsev, and Haimer A. Trejos. “Surfaces of Orthonormal Frame Bundle with Wagner Lift Metric.” *Lobachevskii Journal of Mathematics* 43.1 (2022): 35-48.

Existence of bifurcation branches of free boundary CMC hypersurfaces

Author: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: cwrodrig@uis.edu.co

Abstract: We present the study of bifurcation points existence in a 1-parametric family $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$ of free boundary CMC hypersurfaces. A bifurcation occurs when a small smooth change made to the parameter values of a system causes a sudden qualitative or topological change in its behaviour. We provide a smooth bifurcating family of free boundary CMC hypersurfaces, whose mean curvatures coincide with the mean curvatures of the original family.

Keywords: Free boundary constant mean curvature hypersurfaces, deformation, bifurcation, Jacobi operator.

Introduction

Let M be a $(n + 1)$ -dimensional differential manifold with smooth boundary $\partial M \neq \emptyset$ and let Σ be a n -dimensional differential manifold with smooth boundary $\partial \Sigma \neq \emptyset$. Let g be a Riemannian metric on M . $\vec{n}_{\partial M}$ is the outer unit normal field along the boundary of M . Let $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ be an embedding. We call φ a *free boundary CMC hypersurfaces* if:

- (a) $\varphi(\Sigma) \cap \partial M = \varphi(\partial \Sigma)$,
- (b) the normal bundle $T(\varphi(\Sigma))^\perp$ is orientable,
- (c) and for each point $p \in \varphi(\partial \Sigma)$, $\vec{n}_{\partial M}(p) \in T_p \varphi(\Sigma)$,
- (d) $\varphi(\Sigma)$ have constant mean curvature (CMC) defined by g .

Now, we give the general definition of bifurcation point for an application F defined between general Banach spaces.

Definition 3. Let W and Y be Banach spaces, $\Omega \subset W$ open and $F : \Omega \rightarrow Y$ a continuous map. Suppose there is a simple arc in Ω parameterized by $\omega : I \rightarrow \Omega$, where I is an interval in \mathbb{R} , such that $F(\omega(t)) = 0$ for all $t \in I$. If there exists a number $t_0 \in I$ such that every neighborhood of $w(t_0)$ contains zeros of F that are not in $\text{Im}(\omega)$, then $w(t_0)$ is called a *bifurcation point* for the equation $F = 0$ with respect to curve ω .

What is sought when studying Bifurcation Theory is to find the bifurcation points for the equation $F = 0$ with respect to curve ω and to understand the structure of $F^{-1}\{0\}$ around such points. In our case W is going to be of the form $I \times X$, where X is a real Banach space and the curve will be of the form $\text{Im}(\omega) = \{(t, 0) : t \in I, 0 \in X\}$.

In our context, φ_0 is a bifurcation point with respect to $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ if and only if, for all $s > 0$, given a s -neighborhood of φ_0 , $V_s \subset C^{j,\alpha}(\Sigma, M)$, there exists $\psi_s \in V_s$, such that, ψ_s is a free boundary CMC immersion and $\psi_s(\Sigma)$ is not congruent with any $\varphi_t(\Sigma)$.

Existence of Bifurcation with parameter the mean curvature

We define the following space:

$$C_\partial^{j,\alpha}(\Sigma) := \{f \in C^{j,\alpha}(\Sigma) : g(\nabla f, \vec{n}_{\partial M}) + \mathbb{I}^{\partial M}(\vec{n}_\Sigma, \vec{n}_\Sigma)f = 0\},$$

where $f \in C^{j,\alpha}(\Sigma)$ is the space of j -Hölder functions of index α , ∇f is the gradient of f and $\mathbb{I}^{\partial M}$ is the second fundamental form of ∂M .

We define the Jacobi operator of φ , $J_\varphi : C_\partial^{j,\alpha}(\Sigma) \rightarrow C^{j-2,\alpha}(\Sigma)$, as

$$J_\varphi(f) := \Delta_\Sigma f - (\|\mathbb{I}^2\|_{HS}^2 + Ric_g(\vec{n}_\Sigma, \vec{n}_\Sigma))f.$$

$E = \text{Ker}(J_\varphi)$ and $E^\perp = (\text{Ker}(J_\varphi))^\perp \cap C_\partial^{j,\alpha}(\Sigma)$, this orthogonal with respect to the internal product of $L^2(\Sigma)$.

We give a criterion of existence of bifurcation for a family of free boundary CMC hypersurfaces, so that the mean curvatures of the hypersurfaces in the bifurcation branch are equal to those of the original family.

Theorem. Let $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$ be a smooth variation of φ , such that $\varphi_0 = \varphi$ and $\varphi_t : \Sigma \rightarrow M$ is a free boundary CMC immersion defined as $\varphi_t(p) = \text{Exp}_{\varphi_0(p)}(\phi_t(p)\vec{n}_{\Sigma_0}(p))$, where $\phi_t = t\xi_0 + o(t)$, $\xi_0 = g\left(\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}, \vec{n}_{\Sigma_0}\right) \in C_\partial^{j,\alpha}(\Sigma)$, $o : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C^{j,\alpha}(\Sigma)$, $\frac{o(t)}{t} \rightarrow 0$ if $t \rightarrow 0$, with mean curvature H_t , Jacobi operator J_t and:

- (i) $\frac{dH_t}{dt}\Big|_{t=0} \neq 0$
- (ii) $\text{Dim}(E) = 1$. That is, $E = \{be : b \in \mathbb{R}\}$, for some $e \in C_\partial^{j,\alpha}(\Sigma_0)$, $e \neq 0$.

Then,

- (1) $\int_\Sigma e \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} = 0$, and there exists a differentiable map $\lambda : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < \epsilon_0 \leq \epsilon$, such that $\lambda(0) = \lambda_0 = 0$, $\lambda(t) = \lambda_t$ is a simple eigenvalue of J_t , and there is no other eigenvalue of J_t near 0.
- (2) Assume further that $\lambda'(0) \neq 0$ holds. Then, φ_0 is a bifurcation point with respect to $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$, where the bifurcation branch is an analytic family of free boundary CMC immersions. More precisely, there exist an open interval $\hat{I} \subset \mathbb{R}$, $0 \in \hat{I}$, and C^1 functions $\zeta : \hat{I} \rightarrow E^\perp$ and $t : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}$, such that $t(0) = 0$, $\zeta(0) = 0$, and

$$\psi_s = \text{Exp}_{\varphi_{t(s)}}([\phi_{t(s)} + se + s\zeta(s)]\vec{n}_{\varphi_{t(s)}(\Sigma)}),$$

is a free boundary CMC immersion with mean curvature $\hat{H}_s = H_{t(s)}$.

- (3) Every free boundary CMC immersion sufficiently close, in the topology of $C^{j,\alpha}$, to φ_0 , is equal, up to parameterization, to some element of families $\{\varphi_t\}_{t \in I}$, $0 \in I \subset (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, or $\{\psi_s\}_{s \in \hat{I}}$. Furthermore, the surfaces $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ and $\{\psi_s\}_{s \in \hat{I}}$ are pairwise distinct except for $\varphi_0 = \psi_0$.

References

- [1] Renato G Bettiol, Paolo Piccione And Bianca Santoro, *Deformations of free boundary CMC hypersurfaces and applications*, The Journal of Geometric Analysis, 27(4):3254-3284, 2017.
- [2] M. G. Crandall, And P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Analysis 54 (1971), 321-340.
- [3] Michael G Crandall, And Paul H Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 161-180.
- [4] Miyuki Koiso, Bennett Palmer And Paolo Piccione, *Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 69(4):1519-1554, 2017.
- [5] Rodríguez C. Carlos Wilson, *Genericity of Nondegenerate Free Boundary CMC Embeddings*, Mediterranean Journal Mathematics, 17:188, 2020

Educación Matemática

Estudio correlacional entre el curso matemática elemental y el curso matemática general del Instituto Tecnológico de Costa Rica

Autor: Luis Fernando Mora Picado
Instituto Tecnológico de Costa Rica
E-mail: lmora@itcr.ac.cr

Resumen: La presente investigación tuvo la finalidad de determinar la relación entre el rendimiento académico del curso matemática elemental en comparación con el curso de matemática general. La investigación se centró en los estudiantes de ingeniería que matricularon durante el primer semestre del 2023 el curso nivelatorio de matemática elemental con sigla MA0001 y que a su vez matricularon durante el segundo semestre del mismo año el curso de matemática general con sigla MA0101 del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Para ello se realizó un estudio estadístico correlacional utilizando el software R, presentando interesantes resultados.

Palabras clave: Correlacional, rendimiento, matemáticas.

Referencias

- [1] Ferrero R. y J. Lopez. Analisis de correlación: guía rápida en R. (2019).
- [2] Ramírez-Alan, Oscar. Correlación y Regresión Lineal. (2017).
- [3] Matematica Elemental: Curso en línea del Tecnológico de Costa Rica. Tecnológico de Costa Rica. URL: <https://www.tec.ac.cr/matematica-elemental>.(2023).

El uso de la evaluación diagnóstica en el PEA de la Matemática

Autora: Ana Paredes-Proaño
Pontificia Universidad Católica del Ecuador
E-mail: aparedes667@puce.edu.ec

Resumen: En esta ponencia se presentan algunos del proyecto de investigación (ver [3]), titulado “Estudio del rendimiento académico en asignaturas de la Disciplina Matemática, de los estudiantes que ingresan a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE)”. En el trabajo se hace referencia a los objetos matemáticos que se toman en cuenta para la preparación del instrumento que se presenta, usado como evaluación diagnóstica para determinar los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes al llegar a la PUCE, en la Disciplina Matemática. La propuesta de evaluación diagnóstica presentada fue aplicada en algunas carreras que en su malla curricular contienen asignaturas Matemáticas. Finalmente se realiza un análisis de resultados. De manera precisa en la investigación se integran estrategias didácticas y componentes del Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática con énfasis en la evaluación.

Palabras & clave: enseñanza – aprendizaje, estrategias didácticas, evaluación diagnóstica, Matemática.

Referencias

- [1] Barcia, J., Carvajal, B. (2015). El proceso de enseñanza aprendizaje en la Educación Superior. Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa, volumen (3), pp. 16
- [2] Colman, H. (2020). Tipos de evaluación educativa. Instituto para el futuro de la educación. <https://webdelmaestrocmf.com/portal/tipos-de-evaluacion-educativa>
- [3] de León Rodríguez, N., Santy Ruales, W., Ortiz Palacios, C., Paredes Proaño, A., and Camacho Cañar, E. (2022). La evaluación diagnóstica como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Universidad Y Sociedad, 14(S5), 583-594. Recuperado a partir de <https://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus/article/view/3327>

Relación de la práctica de ajedrez y el rendimiento matemático de los estudiantes del Colegio Comunal Orquídeas, Bogotá-Colombia

Autor: Irvin Gregorio Malave Castellano
Fundación Universitaria los Libertadores
E-mail: irvinmalave@gmail.com

Resumen: El estudio emplea un modelo VAR para explorar la relación entre la práctica de ajedrez y el rendimiento en matemáticas en el Colegio Comunal Orquídeas, Bogotá, usando datos recopilados a lo largo de once años para transfórmalos en series de tiempo. Los coeficientes estimados revelan cómo estas variables se influyen mutuamente y cambian con el tiempo, con un alto R-cuadrado (96.19 % para ajedrez, 97.12 % para matemáticas), indicando una sólida capacidad del modelo para explicar la variabilidad observada. Este enfoque subraya potenciales beneficios educativos del ajedrez en habilidades matemáticas.

Metodología: Se utilizó el modelo Vector Autoregressive (VAR) en series de tiempo para analizar la dinámica entre la práctica de ajedrez y el rendimiento en matemáticas de los estudiantes del Colegio Comunal Orquídeas. Se recopilaron datos a lo largo de once años, examinando la correlación y causalidad entre estas variables a través de análisis estadísticos y pruebas de estacionariedad. Hallazgos: 1. Correlación positiva: Se encontró una correlación significativa entre la práctica de ajedrez y los puntajes en matemáticas. Los estudiantes con mejores puntajes en ajedrez tendieron a obtener mejores resultados en matemáticas. 2. Modelo VAR: El modelo VAR mostró que la práctica de ajedrez influye en el rendimiento matemático de manera dinámica y correlacionada. 3. Proyecciones: Las proyecciones del modelo indicaron un aumento en los puntajes de ajedrez y matemáticas en periodos futuros, respaldando la relación positiva observada.

Conclusiones: El estudio respalda la idea de que la práctica regular de ajedrez puede ser beneficiosa para mejorar el rendimiento en matemáticas de los estudiantes. Esto sugiere que integrar el ajedrez en el currículo escolar podría ser una estrategia efectiva para potenciar habilidades cognitivas y académicas en el contexto específico del Colegio Comunal Orquídeas en Bogotá, Colombia. Los resultados también contribuyen al conocimiento científico sobre los beneficios del ajedrez en la educación. En resumen, este estudio proporciona evidencia empírica de la relación positiva entre la práctica de ajedrez y el rendimiento matemático, destacando su relevancia para futuras implementaciones educativas y políticas escolares.

Palabras & frases clave: Ajedrez, rendimiento matemático, Modelo VAR, series de tiempo.

El concepto de permutación: un análisis teórico

Autores: Astrid Carolina Archila Prada¹, Solange Roa Fuentes², Javier Camargo

García³

Universidad Industrial de Santander^{1,2,3}

E-mail: astridcap98@gmail.com¹, doraroaf@uis.edu.co², jcam@matematicas.uis.edu.co³

Resumen: Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE (Arnon et al., 2014); esta teoría cognitiva de la Didáctica de las Matemáticas explica cómo los individuos aprenden o construyen conceptos y nociones matemáticas. El corazón de la teoría APOE es la Descomposición Genética, este modelo busca organizar el conocimiento necesario para la construcción de un concepto o noción. La Descomposición Genética describe estructuras mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) que se construyen y relacionan por medio de mecanismos mentales (interiorización, encapsulación, des-encapsulación, coordinación, tematización, entre otros). Se toma esta teoría como una herramienta para explicar posibles modelos cognitivos que pueden ser construidos por un individuo para comprender conceptos o nociones matemáticas, en este caso, para el concepto de permutación. Esta investigación concibe este concepto como ordenación y función biyectiva.

En esta oportunidad se presentan los elementos que componen la primera etapa del ciclo de investigación de la teoría, el Análisis teórico; estos elementos son: el estudio de aspectos epistemológicos, el análisis de libros de texto y resultados previos en didáctica de las matemáticas relacionados con el concepto de permutación. Esta etapa del ciclo permite conocer los inicios, el desarrollo y la evolución del concepto, así como reconocer la importancia que ha adquirido en diversas áreas, especialmente en las que contiene álgebra abstracta. El análisis epistemológico, por ejemplo, permite identificar los retrocesos, avances y estancamientos en la formulación formal del concepto; el análisis de libros de texto permite determinar definiciones, ejemplos, ejercicios y en general la visión de los autores sobre el concepto; por su parte, el estudio de investigaciones desde la didáctica de las matemáticas permite identificar los fenómenos asociados con los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de permutación. Finalmente, estos elementos sustentan el diseño de una descomposición genética del concepto de permutación (Asiala et al., 1998). La comprensión descrita en dicho modelo cognitivo promueve el desarrollo de una forma de pensar sobre la permutación, lo que permitirá un mejor desempeño de los estudiantes en diversos contextos relacionados con: matemática discreta, teoría de grafos, teoría de juegos, entre otras.

Palabras & frases clave: APOE, permutación, análisis teórico, ordenación, función biyectiva.

Referencias

- [1] Arnon, Ilana, et al. "APOS theory." A framework for research and curriculum development in mathematics education (2014): 5-15.
- [2] Asiala, Mark, et al. "The Development of Students Understanding of Permutations and Symmetries." International Journal of Computers for Mathematical Learning 3.1 (1998): 13-43.

Evolución cognitiva del concepto de vector en un curso de álgebra lineal

Autoras: Yulieth Alexandra Gutierrez Carrillo¹, Solange Roa Fuentes²
Universidad Industrial de Santander^{1,2}
E-mail: yuliethgc98@gmail.com¹, roafuentes@gmail.com²

Resumen: Se presentan los resultados obtenidos en una investigación que utiliza la teoría APOE (Acrónimo Acción, Proceso, Objeto y Esquema) [4] como marco teórico, para explicar cómo evolucionan las construcciones Acción, Proceso y Objeto de vector ($A \rightarrow P \rightarrow O$) en estudiantes universitarios de un curso de álgebra lineal; mediante la aplicación de las tres componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE. Los resultados señalan las características de las Tareas e indican el rol del espacio vectorial \mathbb{R}^n para promover la evolución de las concepciones sobre el vector.

Palabras & frases clave: vector, álgebra lineal, teoría APOE

Introducción

Los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal han desarrollado un interés creciente durante los últimos años [11]. En particular, el concepto de vector ha sido estudiado desde diferentes perspectivas teóricas que han identificado problemáticas en el aprendizaje, relacionadas con: la representación del vector [2, 7, 10]; la naturaleza del vector y el escalar [1, 3]; las concepciones del vector cero de un espacio vectorial [8]; y la comprensión del vector en espacios vectoriales diferentes a \mathbb{R}^n [5, 6]. Así mismo, se cuenta con tienen investigaciones que presentan propuestas didácticas que buscan mitigar las dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje de este concepto [1, 9].

Con base en estos elementos y como resultado del diseño y desarrollo de la primera componente del ciclo de investigación, Análisis teórico, se presenta una descomposición genética del concepto de vector en el contexto del álgebra lineal. Este modelo cognitivo permite determinar la forma en que evolucionan las estructuras mentales del concepto de vector, que se evidencian en estudiantes de un curso de álgebra lineal; esto a partir de la relación con otros conceptos como el espacio vectorial \mathbb{R}^n , sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal y base. La descomposición genética del concepto de vector es una herramienta importante para el diseño de tareas y secuencias de enseñanza, pues, muestra un camino viable para la comprensión del concepto de vector y su evolución.

Referencias

- [1] Acevedo, Jorge I., et al. "Estudio de la enseñanza del concepto de vector en \mathbb{R}^2 , y propuesta didáctica." *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa* 18.1 (2021): 4-13.
- [2] Aguirre, Jose, and Gaalen Erickson. "Students conceptions about the vector characteristics of three physics concepts." *Journal of research in Science Teaching* 21.5 (1984): 439-457. doi:10.1002/tea.3660210502
- [3] Appova, Aina, and Tetyana Berezovski. "Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations." *Conference on research in undergraduate mathematics education: Crume xvi*. Vol. 2. Denver: RUME, 2013.
- [4] Arnon, Ilana, et al. "APOS theory." *A framework for research and curriculum development in mathematics education* (2014): 5-15.

- [5] Cabrera, Angel Francisco Can. *Construcciones mentales en el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial*. Diss. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, 2022.
- [6] Harel, Guershon. “Three principles of learning and teaching mathematics: Particular reference to linear algebra—Old and new observations.” *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000. 177-189.
- [7] Hillel, Joel. “Modes of description and the problem of representation in linear algebra.” *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000. 191-207.
- [8] Parraguez, Marcela. “Construcción de significados de las operaciones del espacio vectorial a través de conjuntos linealmente independientes/dependientes.” RECHIEM. *Revista Chilena de Educación Matemática* 12.2 (2020): 60-70. doi:10.46219/rechciem.v12i2.22
- [9] Paz Rodríguez, Sofía. *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas*. MS thesis. Tesis (MC)—Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa, 2020.
- [10] Poynter, Anna, and David Tall. “Relating theories to practice in the teaching of mathematics.” *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 2005.
- [11] Stewart, Sepideh, et al. “The linear algebra curriculum study group (LACSG 2.0) recommendations.” *Notices of the American Mathematical Society* 69.5 (2022). doi:10.1090/noti2479

Aprendizajes en el pensamiento reflexivo de un profesor de matemáticas en formación sobre la función logística y el ahorro

Autores: Jaiver David Rey Gómez¹, Sandra Evely Parada Rico²
Universidad Industrial de Santander^{1,2}
E-mail: jaiverdavidrey@hotmail.com¹, sanevepa@uis.edu.co²

Resumen: En esta ponencia se reportan los primeros resultados de una investigación-acción colaborativa cuyo objetivo es describir los aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática y el contexto de la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula. Esta se fundamenta teóricamente en el Modelo de Reflexión y Acción (RyA) [1] especialmente en lo relacionado con el pensamiento reflexivo del profesor, y la actividad matemática, que, para efectos de la investigación, se particulariza como la actividad suscitada por las conexiones entendidas desde la Teoría Ampliada de las Conexiones TAC ([2], [3], [4]). Producto de los datos recolectados a través de una aproximación a un grupo de profesores de matemáticas en formación se logra evidenciar aprendizajes en el pensamiento matemático, didáctico y orquestal de un profesor que reflexionó sobre la función logística (como objeto matemático), y sus relaciones con el ahorro (como objeto de la economía y las finanzas). La presente comunicación girará en torno a la descripción de dichos aprendizajes.

Palabras & frases clave: profesores en formación, conexiones, actividad matemática, economía, finanzas.

Referencias

- [1] Parada Rico, Sandra Evely. Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa, 2011.
- [2] Evitts, Thomas. Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula. Pennsylvania State University College of Education, 2004.
- [3] Businskas, Aldona. Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. Simon Fraser University, 2008
- [4] Dolores, Crisologo y García, Javier. "Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks". International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 49 (2), 227-252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>

Tipos de generalización que producen estudiantes de grado octavo (12-14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones: una mirada desde la teoría de la objetivación

Autoras: María Angélica Ramírez Archila¹, Ana Yamile Meza Quintero²
Universidad Distrital Francisco José de Caldas^{1,2}
E-mail: maramireza@upn.edu.co¹, yamilemeza9@gmail.com²

Resumen: En los últimos años, uno de los intereses de la investigación en Educación Matemática ha sido el estudio de los tipos de generalización de patrones que realizan los estudiantes, ya que es un factor fundamental para potenciar el pensamiento algebraico. Por esta razón, a través de esta charla corta se pretende dar a conocer brevemente nuestro proyecto de tesis que tiene como finalidad documentar los tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo en la actividad matemática cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones. Para ello, de acuerdo con las producciones de los estudiantes, se identificaron, caracterizaron y describieron los medios semióticos de objetivación que se movilizan y de esta manera identificar la presencia del componente de abducción analítica.

El conocimiento unitario y pragmático en el aprendizaje de la definición de límite de una función

Autor: Jorge Fajardo Molinares
Institución Universitaria de Barranquilla & Universidad Pedagógica Experimental Libertador
E-mail: jjfajardo@unibarranquilla.edu.co

Resumen: La presente investigación tuvo como propósito generar aportes teóricos que permitieran la identificación del Obstáculo epistemológico Conocimiento Unitario y Pragmático que se presenta durante la enseñanza del Concepto de Límite de una Función de Variable Real en un punto, con Profesores de Matemática y estudiantes de la Institución Universitaria de Barranquilla de la ciudad de Barranquilla. Para el abordaje epistemológico se asumió la Teoría Antropológica de Didáctica de la Matemática, la Teoría de las Situaciones Didácticas y el conocimiento sobre Obstáculos Epistemológicos, con el propósito de develar dificultades y errores presentes en el proceso de enseñanza del Concepto de Límite de una Función de Variable Real. Metodológicamente, se abordó desde el paradigma interpretativo fenomenológico, bajo el método hermenéutico dialéctico, aspectos que corresponden con el enfoque cualitativo. Los informantes clave del estudio estuvieron conformados por tres (3) profesores adscritos a la Facultad de Ciencias Básicas de la Institución Universitaria de Barranquilla con amplia experiencia en el área de cálculo y tres (3) estudiantes del programa de Técnico en mantenimiento electromecánico y electrónico industrial correspondiente al segundo cuatrimestre del respectivo período académico 2023. La recolección de información se basó en la aplicación de una entrevista en profundidad a tres docentes de matemática y tres estudiantes de la institución mencionada, hecha vía online y registrada en el teléfono celular, información sometida a reducción mediante el proceso de categorización y saturación para crear varias dimensiones a partir de las percepciones de los entrevistados, tales como: obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del límite de una función de variable real; conocimiento unitario y pragmático y estrategias de enseñanza en la educación básica universitaria, entre otras.

Palabras & frases clave: Obstáculo epistemológico, límite de una función feal de variable real, conocimiento unitario y pragmático, didáctica.

Descripción de la comprensión del concepto de función, bajo el modelo de van Hiele, para estudiantes de grado 9° en la Institución Educativa Simón Bolívar, inspección de San Francisco en el municipio del Calvario-Meta

Autoras: Monica Beltrán Silva¹, Alba Soraida Gutierrez Sierra²
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia^{1,2}
E-mail: monica.beltran01@uptc.edu.co¹, alba.gutierrez01@uptc.edu.co²

Resumen: El proceso de investigación tuvo como objetivo diseñar una entrevista de carácter socrático, basado en el modelo de Van Hiele, que permitió describir cómo los estudiantes comprenden el concepto de función. Basados en la metodología de enfoque mixto, se utilizó como herramientas: la prueba diagnóstica, que arrojó debilidades frente al concepto de función; y para la recolección de información, se aplicó la entrevista semiestructurada de carácter socrático, mediante el guión (estructura) de la entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento de acuerdo al modelo, dejando ver el conocimiento de los estudiantes con relación al concepto de función. Esta interacción permite percibir algunos procesos cognitivos de los estudiantes en el momento de razonar. El estudio incluyó a 11 estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Simón Bolívar en San Francisco, Calvario-Meta. En conclusión, evaluar la incidencia en la aplicación de la entrevista socrática basada en el modelo de Van Hiele, logra situar en qué nivel de razonamiento se encuentra el estudiante a través de los descriptores hipotéticos y de esa manera descubrir cómo los estudiantes comprenden el concepto matemático, esto permite que el docente diseñe y aplique actividades para el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que en ocasiones los estudiantes presentan dificultades.

Palabras & frases clave: Función, función, descriptores, comprensión, razonamiento, Niveles de Van Hiele.

Introducción

Cuando se habla de las matemáticas, se relaciona muy seguido con problemas, números y operaciones; y por supuesto lo difíciles que son aprenderlas para la mayoría de las personas. Pero en el fondo al discutir sobre matemáticas, tiene cantidad de situaciones de la vida real que se pueden simular. Una muestra de lo anterior la tenemos cuando nos ubicamos en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en la didáctica de asignaturas como el álgebra, la geometría, la trigonometría y el cálculo, dentro de las cuales la asimilación de algunos conceptos resulta de valiosa importancia para los educandos. Centrándonos un poco más en el cálculo, conceptos como los de relación y función han adquirido un alto grado de desarrollo tanto para la enseñanza como para la aplicación de dicha asignatura, en particular para estudiantes de básica media, en donde ya hay mayor comprensión de conceptos matemáticos y abstracción del mismo, debido a que su asimilación y percepción se facilita a través de algunos de los sentidos y el ejercicio de la razón: las relaciones y funciones las pueden ver sobre el plano cartesiano o escuchar a partir de los enunciados que se usan para describir situaciones de experiencias como, por ejemplo, la trayectoria de una pelota de fútbol cuando es pateada, donde se puede deducir de las ecuaciones distancia, velocidad y tiempo, o construir a partir de tablas de valores. Las diferentes formas de abordar los mismos conceptos, a través de los sentidos y la abstracción que permite decodificar símbolos y razonamiento.

Lo que procuramos con este escrito es dejar sustentada la relevancia de las características inherentes a los conceptos en cuestión, para proponer su estudio y aplicación bajo la óptica del modelo de van Hiele.

Al comenzar este estudio, se plantea que se puede entender el pensamiento de los estudiantes utilizando la técnica de la entrevista socrática, la cual se basa en hacer preguntas orientadoras. El Modelo van Hiele es útil para entender y

evaluar cómo razonan los estudiantes en relación con el concepto de función. Este enfoque se ha usado en diferentes investigaciones mediante la entrevista socrática, con la premisa de que proporciona información valiosa al investigador para identificar los niveles de razonamiento basándose en las respuestas de los estudiantes. Además, se busca fomentar un pensamiento crítico y reflexivo sobre el concepto de función, al mismo tiempo que se promueve la búsqueda de diferentes soluciones para comprender las matemáticas. Por lo tanto, se estimula la capacidad de análisis en situaciones relacionadas con el concepto, para generar interdisciplinariedad con otras asignaturas, así como facilitar la relación de los contenidos con la vida diaria de los estudiantes.

Referencias

- [1] Cortes Garcés, Fabio Alexander. “Diseño de una entrevista socrática para la comprensión de la noción de indeterminación. *Facultad de Ciencias* (2014).
- [2] Gutierrez, Ángel y Adela Jaime. “Estudio de las características de los niveles de Van Hiele.” *Psicología en Educación Matemática* 3 (1987): 131-137.
- [3] Jaramillo Lopez, Carlos Mario, and Pedro Campillo Herrero. “Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele.” (2001).
- [4] Mora, Fernando Barrera, and Aaron Reyes Rodríguez. “La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento geométrico.” *Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI* 3.5 (2015).
- [5] Vila Yupanqui, Miguel Angel. “Representaciones semióticas para el aprendizaje del concepto de función cuadrática en estudiantes de Tayacaja.” (2017).

Ecuaciones Diferenciales

Subarmónica en el modelo de la perla giratoria

Autor: Alexander Gutierrez G.
 Universidad Tecnológica de Pereira
 E-mail: alexguti@utp.edu.co

Resumen: Se establecen condiciones necesarias para la existencia y multiplicidad para una ecuación diferencial no lineal que describe el movimiento de una perla en un aro circular que gira a velocidad constante y tiene un forzamiento periódico.

Palabras & frases clave: Subarmónica, sub y super soluciones.

Introducción

Consideramos la ecuación diferencial

$$\theta'' + \sin(\theta) - \frac{\omega}{2} \sin(2\theta) = f(t), \quad (14)$$

que se obtiene al modelar el problema clásico de mecánica que consiste en el movimiento uniforme de una perla en un aro circular que rota verticalmente, donde ω es la velocidad angular y el forzamiento externo f es la función T -periódica.

El estudio de (14) sin forzamiento externo es un problema no lineal que presenta una bifurcación tipo tenedor [3]. El modelo canónico se puede modificar al cambiar eje de rotación del aro o se impone fricción, ver [4].

En este caso se va a suponer que $f(t)$ se puede reescribir como $f(t) = \bar{f} + \tilde{f}$, donde $\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ y \tilde{f} pertenece a uno de los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_T &= \{u \in C(\mathbb{R}) : u(t) = u(t+T) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \bar{u} = 0\}, \\ \tilde{L}_T^1 &= \{u \in L^1(\mathbb{R}) : u(t) = u(t+T) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ and } \bar{u} = 0\}. \end{aligned}$$

Observe que si $\omega = 0$, entonces (14) es la paradigmática ecuación del péndulo $x'' + \sin x = f(t)$, que ha sido ampliamente estudiada por numerosos autores en el siglo XX, una revisión reciente de los avances que se han hecho al respecto han sido presentados en [1].

En este trabajo se está interesado en el estudio de la existencia de soluciones subarmónicas. Así que diremos que una solución u de (14) es subarmónica de orden k ($k \geq 2$) si es una solución kT -periódica de (14) que no es lT periódica para ningún $l = 1, 2, \dots, k-1$. Adicionalmente, diremos que dos soluciones subarmónicas u y v de orden k son de la misma clase de periodicidad si $u(t) = v(t + lT)$ para algún $l = 1, 2, \dots, k-1$, en caso contrario se dirá que son de diferente periodicidad.

Los resultados principales [5], están relacionados con los trabajos de Zanolin y Boscaggin [2].

Referencias

- [1] J. Mawhin. Global Results for the Forced Pendulum Equation. Handbook of Differential Equations. Ordinary Differential equations, Volume 1. Elsevier 2004.
- [2] F. Zanolin, A. Boscaggin, "Subharmonic solutions for nonlinear second order equations in presence of lower and upper solutions", Discrete and continuous dynamical systems, Vol 33, N. 1. 2013.

- [3] A.V. Karapetyan, V.I. Kalenova, V.M. Morozov. "The stability of the steady motions of non-holonomic mechanical systems with cyclic coordinates", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 68, Issue 2, , 173-182, (2004).
- [4] A. A. Burov, V. I. Nikonov, "Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier,137, (2021).
- [5] D. Cortes, A Gutiérrez. "Bead on a rotating circular hoop: periodic and subharmonic solutions". preprint.

Método del balayage en grafos

Autor: Diego Alexander Castro Guevara
 Universidad Tecnológica de Pereira
 E-mail: xandercastro@utp.edu.co

Resumen: En este trabajo se estudia el proceso de barrido de un grafo finito y conexo D , considerando una distribución de masa inicial μ y una numeración de los vértices v_1, v_2, \dots ; a partir de los cuales se define la estrategia de barrido, a través de una iteración, con la cual se construye una sucesión de medidas μ_n que miden cuanta masa queda en cada vértice en el n -ésimo barrido y una sucesión de funciones u_n que mide cuanta masa se ha barrido en el n -ésimo barrido. Probaremos que la sucesión u_n converge de manera uniforme a cero y que además u_n converge a una función u que satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases} \quad (15)$$

Palabras & frases clave: Problema de Dirichlet, Principio del Máximo, Método de Perrón, Funciones Subarmónicas.

Introducción

Un método para reconstruir funciones armónicas en un dominio acotado y conexo, a partir de sus valores de frontera fue desarrollado por H. Poincaré [1], conocido como método de balayage. Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n , μ una medida soportada en Ω . El balayage para la medida μ es una medida ν , tal que $\nu = 0$ en Ω y $\Phi^\mu = \Phi^\nu$ fuera de Ω , donde Φ^μ representa el potencial Newtoniano asociado a la medida μ .

Ya que μ puede ser reconstruida via $-\Delta\Phi^\mu = \mu$ otra forma de construir la medida balayage es resolver el problema de Dirichlet con dato de borde Φ^μ , y extender la solución por Φ^μ fuera de Ω . Debido a que no era sencillo solucionar en cualquier dominio el problema de Dirichlet, Poincaré planteo cubrir Ω con un número finito de bolas y usar la representación de Poisson en cada bola e ir pegando de forma adecuada las soluciones, a este proceso le llamo balayage [2].

Estas ideas de balayage [3] se han extendido a través de la teoría del potencial a diferentes campos en problemas discretos, existiendo conexiones con áreas como ingeniería eléctrica y probabilidad [cita] y modelos interesantes como Internal Diffusion Limits Aggregation or internal DLA, The Rotor-Router model y Divisible Sandpile. [4], [5].

Otros problemas interesante que surgen, en este tipo de proceso de barrido, es considerar un barrido parcial, a través del cual ya no nos interesa barrer de forma total el dominio Ω , si no más bien permitir que haya una cantidad de masa λ , con lo cual si la cantidad μ de masa inicial es mayor que λ barrer el exceso, con lo cual se llega a un problema no variacional

$$\begin{cases} \min(-\Delta u + \lambda - \mu, u) = 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

y para este tipo de problemas se debe estudiar otro tipo de solución diferente al clásico conocido como soluciones viscosas [6].

Referencias

- [1] H. Poincaré, *Theorie du potentiel Newtonien*, paris (1899).
- [2] B. Gustafsson, *Lectures on Balayage*, In *Clifford algebras and potential theory* 7 (2004), 17-63.
- [3] L.A. Caffarelli, *The Obstacle Problem Revisited*, *The Journal of Fourier Analysis and Applications* 4 (1998), 383-402.
- [4] J.L Snell P.G. Doyle, *Random Walks and Electrical Networks*, *Mathematical Association of America in their Carus Monographs series* (1985).
- [5] Lionel and Peres Levine Yuval, *Scaling limits for internal aggregation models with multiple sources*, *Journal d'Analyse Mathématique* 111 (2010), no. 1, 151–219, DOI 10.1007/s11854-010-0015-2.
- [6] J. Calder, *Lectures notes in viscosity solutions*, University of Minnesota; 2018.

Opinion divergence dynamics around a political idea

Authors: Ricardo Cano Macias¹, Jorge Mauricio Ruiz V.²
Universidad de La Sabana¹, Universidad Nacional de Colombia²
E-mail: ricardocm@unisabana.edu.co¹, jmruizv@unal.edu.co²

Abstract: A differential equation model is presented that describes the political polarization of a population under a context of distrust between individuals. The population is supposed to consist of a group of moderate followers, a group of intransigent defenders and a group of contradictors. The stability of the system of differential equations is studied in order to establish measures that avoid homogenization around a certain political position. Two real cases of political polarization in Colombian society are analyzed that allow us to demonstrate the capacity of the model to represent the general behavior of the division of opinion and its usefulness in controlling polarization.

Keywords: Mathematical modeling, Differential equations, Stability analysis, Political polarization

Introduction

Currently, technological development and access to information that people have allows decision-making to be more transparent and participatory, which provides a greater opportunity for the exchange of opinions between individuals in a population. However, this exchange of ideas gives rise to people's positions and points of view being challenged, which leads to the need to defend them, rejecting contrary opinions to the point of reaching an irreconcilable level of divergence that can produce a polarization in society.

From the social sciences there has been extensive reflection on the phenomenon of polarization and the various reasons for its appearance [1]. Some cases that generate social polarization are for example: The legalization of abortion [2], immigration and the environment [4], the division between the Republican and Democratic parties in the United States [5] and in particular, in Colombia the plebiscite for the peace agreements with the FARC [3].

In this work, we propose a model that analyzes the dynamics of opinion around an idea \mathcal{A} . In contrast to other works [6, 7] that consider constant rates of interaction between population groups, the proposed model assumes that the diffusion strategy used by one of the groups corresponds to a functional response Holling type II. We validate the proposed model with two real case studies of the phenomenon of polarization in Colombian society between the years 2010 to 2018. Based on the parameters of the model, two dimensionless values R_0 and z_1 are defined that allow us to establish two equivalent criteria for determine whether the polarization phenomenon occurs or not. Also, a sensitivity analysis of R_0 is performed with respect to the estimated parameters of the case studies.

References

- [1] Druckman, J.N., Klar, S., Krupnikov, Y. et al. *Affective polarization, local contexts and public opinion in America*. *Nat Hum Behav* 5, 28–38 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41562-020-01012-5>
- [2] Mouw, Ted, and Michael E. Sobel. *Culture Wars and Opinion Polarization: The Case of Abortion*. *American Journal of Sociology* 106, no. 4 (2001): 913–43. <https://doi.org/10.1086/320294>.
- [3] Basset, Yann. (2018). *clave del rechazo del plebiscito para la paz en Colombia*. *Estudios Políticos (Universidad de Antioquia)*, 52. <http://doi.org/10.17533/udea.espo.n52a12>
- [4] Chagas-Bastos, Fabrício H. 2019. *Political Realignment in Brazil: Jair Bolsonaro and the Right Turn*. *Revista de Estudos Sociais* 69: 92-100. <https://doi.org/10.7440/res69.2019.08>

- [5] Christopher Hare and Keith T. Poole. 2014. *The Polarization of Contemporary American Politics* Polity 46:3, 411-429.
- [6] Goffman, W., Newill, V. (1964) *Generalization of Epidemic Theory: An Application to the Transmission of Ideas*. Nature 204, 225–228 . <https://doi.org/10.1038/204225a0>
- [7] Hayward, J. (1999) *Mathematical modeling of church growth*. The Journal of Mathematical Sociology, 23:4, 255-292, DOI:10.1080/0022250X.1999.9990223

Infinitas soluciones para un problema tipo ϕ -Laplaciano

Autor: Sigifredo Herrón¹, Diana Sánchez, Emer Lopera
 Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín¹
 E-mail: sherron@unal.edu.co¹

Resumen: Establecemos la existencia de infinitas soluciones radialmente simétricas que cambian de signo. Estas soluciones se obtienen para un problema de valores en la frontera con condiciones tipo Dirichlet y que incorpora un caso particular del operador ϕ -Laplaciano. Nuestras principales herramientas son el plano de fase y el análisis de energía, que requieren un uso extenso de una identidad de tipo Pozohaev. Más exactamente, consideramos

$$\begin{cases} -\Delta_{\phi}(u) = W(x)f(u), & x \in B_1(0), \\ u(x) = 0, & x \in \partial B_1(0), \end{cases} \quad (17)$$

donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N (N > 2)$ es la bola unitaria, Δ_{ϕ} denota el operador ϕ -Laplaciano, definido como

$$\Delta_{\phi}(u) = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u),$$

$W > 0$ es una función de peso C^1 y ϕ está dada por

$$\phi(s) = \frac{|s|^{p-2}}{(1+s^2)^{m/2}},$$

con $m > 0$ pequeño. Consideramos la no linealidad

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(s) := \begin{cases} s^{q_1}, & s \geq 0, \\ -|s|^{q_2}, & s < 0, \end{cases}$$

donde

$$2 < p < q_1 + 1 < Np(q_1 + p - 1)/[Nq_1 + (p - 1)(N - p)], \quad q_2 > p^* - 1 \quad (18)$$

y $p^* = \frac{Np}{N-p}$ ($N > p$) es el conocido exponente crítico de Sobolev.

Palabras & frases clave: Plano de fase, ϕ -laplacian, análisis de energía.

Referencias

- [1] Castro, A., Cossio, J., Herrón, S., Pardo, R. and Vélez, C. (2020). Infinitely many radial solutions for a sub - super critical p -Laplacian problem. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 199(2), 737-766.
- [2] Castro, A., Kwon, J., Tan, C.M. (2007). Infinitely many radial solutions for a sub-super critical Dirichlet boundary value problem in a ball. *Electron. J. Differ. Equ.* 2007(111), 1-10.
- [3] Herrón, S., Lopera, E. and Sanchez, D. (2022). Positive solutions for a semipositone ϕ -Laplacian problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 510(2), 126042.
- [4] Wei-Ming Ni and James Serrin. (1986). Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations. The anomalous case. *Accad. Naz. Lincei*, 77, 231-257.
- [5] Reichel, W. and Walter, W. Radial solutions of equations and inequalities involving the p -Laplacian *J. Inequal. Appl.* (1997), pp. 47-71.

Minicursos

Introducción a los modelos de dinámica de opinión

Autor: Norma Leticia Abrica-Jacinto
Universidad del Mar
E-mail: leticia.abrica@gmail.com

Resumen: Los modelos de dinámica de opinión son representaciones matemáticas y computacionales utilizadas para simular y comprender cómo las opiniones y actitudes de agentes individuales cambian y evolucionan a lo largo del tiempo como resultado de las interacciones sociales, los factores psicológicos y el entorno social [1, 2]. En estos modelos los agentes se representan con ciertos atributos y comportamientos, y se establecen reglas para describir cómo interactúan entre sí. Estas interacciones pueden incluir conversaciones, influencias mutuas y cambios de opinión basados en la información que reciben de su entorno social y de los propios agentes. Generalmente, estos modelos de dinámica de opinión se describen por medio de sistemas de ecuaciones discretas no-lineales, los cuales varían en complejidad y detalle, desde enfoques simples hasta simulaciones más elaboradas. Como resultado de estos modelos es posible explicar la formación de grupos de opinión (consenso, polarización, fragmentación) en función de los parámetros, lo cual puede brindar elementos esenciales para comprender diversos fenómenos sociales (rebeliones, tendencias, etc.). El objetivo de esta charla es dar una introducción a los modelos de dinámica de opinión presentando los elementos que los caracterizan, la forma en cómo se analizan y algunos ejemplos [1, 2, 3, 4].

Palabras & frases clave: modelado matemático, dinámica de opinión.

Referencias

- [1] Deffuant, Guillaume, et al. "Mixing beliefs among interacting agents." *Advances in Complex Systems* 3.01n04 (2000): 87-98.
- [2] Rainer, Hegselmann, and Ulrich Krause. "Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation." (2002).
- [3] Abrica-Jacinto, Norma L., Evgenii Kurmyshev, and Héctor A. Juárez. "Effects of the interaction between ideological affinity and psychological reaction of agents on the opinion dynamics in a relative agreement model." *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 20.3 (2017).
- [4] Kurmyshev, Evgenii, and Norma Leticia Abrica Jacinto. "The Effect of Agents' Psychology and Social Environment on the Opinion Formation: C/PA Relative Agreement Model in SW and SF Societies." *Chaos Theory and Applications* 4.4 (2022): 212-225.

Introducción a Redes Complejas caso de aplicación: análisis de la red vial de una ciudad

Autores: Mónica Jhoana Mesa Mazo¹, Jorge Mario García Usuga²
Universidad del Quindío^{1,2}
E-mail: mjmesa@uniquindio.edu.co¹, jmgarcia@uniquindio.edu.co²

Resumen: Las redes complejas son estructuras compuestas por nodos interconectados de manera no trivial, que se encuentran en diversos ámbitos como la biología, la informática y las ciencias sociales. En el contexto del tránsito, estas redes representan sistemas de transporte urbano, donde los nodos son intersecciones o estaciones y los enlaces son las rutas o calles que las conectan. La teoría de redes complejas nos permite entender y analizar la dinámica del tráfico, identificar puntos críticos y optimizar el flujo vehicular, lo que es esencial para mejorar la eficiencia y la seguridad del transporte urbano.

La teoría de grafos, que es la base matemática para el estudio de redes, nos proporciona herramientas y conceptos fundamentales para modelar y analizar redes de tránsito. Los grafos pueden ser dirigidos, cuando los enlaces tienen una dirección, o no dirigidos, cuando no la tienen. Además, pueden ser ponderados, donde los enlaces tienen un peso que indica la capacidad o el costo de la ruta. Estas características permiten una representación precisa de las redes de tráfico y su análisis detallado.

El análisis de redes de tránsito implica el uso de diversas métricas y algoritmos para evaluar su eficiencia y resiliencia. Medidas como la centralidad de los nodos, la robustez de la red y la identificación de comunidades son esenciales para entender cómo fluye el tráfico y dónde se pueden producir cuellos de botella. Algoritmos de ruta óptima y simulaciones de tráfico ayudan a prever y mitigar problemas, mejorando la experiencia de los usuarios y la gestión del tránsito urbano.

Finalmente, las herramientas y el software de análisis de redes, como Gephi, NetworkX, SUMO y MATSim, permiten a los profesionales del transporte modelar, visualizar y simular redes de tránsito complejas. Estas herramientas facilitan la toma de decisiones basadas en datos, optimizando rutas y mejorando la infraestructura. A través de este curso, los participantes adquirirán conocimientos y habilidades prácticas para analizar y mejorar redes de tránsito, contribuyendo a la creación de sistemas de transporte más eficientes y sostenibles.

Como ejemplo a continuación se muestra en la Figura (4), la red de Cartagena usando la librería Osmnx en Python.



Figura 4: Red de Cartagena zona turística

Esta red cuenta con 14411 nodos y 39110 aristas.

Análisis topológico de datos en sistemas complejos

Autor: Andy Rafael Dominguez Monterroza
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: adominguez@utb.edu.co

Resumen: En el análisis topológico de datos (TDA) ha emergido como una robusta técnica en Ciencia de datos con aplicaciones variadas en diversos campos. En TDA los datos son representados como un conjunto de puntos en un espacio de alta dimensión. Cada punto en el espacio representa una observación individual, y las coordenadas del punto representan las características de la observación. Uno de los principales objetivos del TDA es extraer información topológica mediante procesos de filtración homológicos del espacio representado por los datos observados.

En este breve cursillo se ofrece una introducción a la homología persistente sobre datos empíricos aplicados sobre sistemas complejos, en particular en contextos de finanzas y neurociencias.

Introducción a la creación de documentos dinámicos con Quarto

Author: Jorge Luis Villalba Acevedo
Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena, Colombia
E-mail: jvillalba@utb.edu.co

Resumen: Para investigadores, docentes, estudiantes y todos los miembros de la academia, es crucial comunicar por escrito los resultados de investigaciones, presentaciones de clase, entregables y trabajos. Sin embargo, la creación de documentos dinámicos sigue siendo una debilidad común en la comunidad académica, lo que dificulta la reproducibilidad de estos documentos. Para abordar estos desafíos, este minicurso ofrece herramientas para la creación de documentos académicos con Quarto, utilizando el lenguaje de programación R. El minicurso tiene como objetivo fortalecer las habilidades necesarias para mejorar la creación de documentos dinámicos, incluso para aquellos con conocimientos limitados de codificación. Cubre tres componentes esenciales: la creación de un entorno de trabajo, la elaboración de documentos dinámicos usando Quarto y la gestión de dependencias de paquetes en R y Python. Además, proporciona información sobre cómo compartir documentos en la web. Siguiendo el paso a paso, los asistentes podrán adoptar prácticas que mejoren la creación de documentos dinámicos y su reproducibilidad.

Palabras & frases clave: RStudio, Markdown, Quarto, Pytho, reproducibilidad.

Referencias

- [1] Villalba, J. (2024). *Curso de R y LaTeX: R Markdown and R Sweave* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/channel/UCu2XC7GPSnlszkGyMmQeGw?sub_confirmation=1

Pósteres

Fractal Topológico

Autora: Eliana Oostra Guerrero
Universidad Sergio Arboleda
E-mail: eliana.oostra01@usa.edu.co

Resumen: El objetivo principal de este proyecto es estudiar bajo cuáles condiciones los continuos de Peano son un espacio subyacente para algún fractal topológico. Para ello, en primer lugar se define fractal topológico mediante sistemas de funciones iteradas (IFS) y sistemas topológicos contractivos (TCS), entre otras definiciones y características. Además, se mostrarán algunos ejemplos para ilustrar estas ideas, para finalmente mediante la definición de continuo de Peano, entender cuál es el problema existente entre estos espacios y los fractales topológicos.

Palabras & frases clave: Sistema de funciones iteradas (IFS), IFS-atractor, Sistema topológico contractivo, fractal topológico, continuo, continuo de Peano, fractales.

Introducción

Ante la pregunta de ¿cómo están relacionados los fractales topológicos y los continuos de Peano? Masayoshi Hata [2] demostró que para cada fractal topológico (X, \mathcal{F}) si X es conexo, entonces es localmente conexo, por lo que es un continuo de Peano. Sin embargo, aún existe un problema abierto: ¿Todo continuo de Peano es un fractal topológico? En el artículo de Magdalena Nowak [6] busca las condiciones para que un continuo de Peano P sea un fractal topológico, se descubre la existencia de un arco libre, esto es un subconjunto abierto de P homeomorfo al intervalo, el cual implica este resultado.

Referencias

- [1] Edgar, Gerald A., and Gerald A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Vol. 2. New York: Springer, 2008.
- [2] Hata, Masayoshi. "On the structure of self-similar sets." *Japan Journal of Applied Mathematics* 2 (1985): 381-414.
- [3] Ward, L. E. "A generalization of the Hahn-Mazurkiewicz theorem." *Proceedings of the American Mathematical Society* 58.1 (1976): 369-374.
- [4] Carreño Montoya, María Esmeralda. "El conjunto de Cantor y algunas de sus propiedades." Hermosillo, Sonora: Universidad de Sonora (2003).
- [5] Munkres, James R. *Topología*. Cambridge, Massachusetts: Prentice Hall. (2002).
- [6] Nowak, Magdalena. "Peano continua with self-regenerating fractals." *Topology and its Applications* 300 (2021).

El enigmático mundo de los números primos

Autora: Daniela Lezcano Cuello

Universidad de Córdoba

E-mail: dlezcanocuello66@correo.unicordoba.edu.co

Resumen: El poster se centra en tres focos. El primero aborda la conjetura de los primos gemelos, partiendo desde algo tan simple como un número primo. En segundo lugar, se destacan los resultados más recientes y relevantes de esta conjetura, incluyendo el trabajo de James Maynard y Terence Tao. Finalmente, se presenta una nueva sucesión que depende de números primos y que no había sido estudiada antes, explorando sus posibles patrones en el infinito.

Palabras & frases clave: Primos gemelos, matemáticas, conjetura.

Introducción

Desde que somos niños, en la escuela nos enseñan que un número primo es aquel que solo se puede dividir entre el uno y el mismo. A pesar de lo básica que puede parecer esta idea, es sorprendente lo poco que sabemos acerca de su comportamiento en el infinito.

A lo largo de la historia, muchos grandes matemáticos como Euclides, Fermat, Euler, Gauss, Riemann y Ramanujan han intentado buscar su patrón o al menos tratar de entenderlos, sin éxito. Sin embargo, sus búsquedas no han sido en vano, ya que han dejado varios problemas abiertos y en desarrollo relacionados con los números primos.

Uno de los problemas más relevantes es la conjetura de los primos gemelos, que indica que existe un número infinito de primos p tales que $p + 2$ también es primo. Aunque este problema sigue sin resolverse, a lo largo de la historia se han presentado muchos avances en esta dirección. En particular, destacamos el resultado de Yitang Zhang y su aporte a la creación del proyecto Polymath.

Además, podemos abordar estos tipos de problemas utilizando la simple aritmética y el estudio de sucesiones en los números. De esta manera, podemos adentrarnos en la curiosidad de las personas y en la trivialidad de las ideas matemáticas sin necesidad de salirnos de la rigurosidad de la teoría de números.

Referencias

- [1] Terence Tao. (2015). Small and Large gaps in the primes. Latinos in the Mathematical Sciences Conference.
- [2] Polymath Project. Bounded gaps between primes - Polymath Wiki.
- [3] David M. Burton. (2011). Elementary number theory, McGraw-Hill, 39.

Una aplicación de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales con retardo

Autores: Alisson C. Romero¹, Esteban Delgadillo²
Universidad Distrital Francisco José de Caldas^{1,2}
E-mail: alcromerog@udistrital.edu.co¹, edelgadilloa@udistrital.edu.co²

Resumen: En el presente trabajo estudiamos la ecuación logística con retardo

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right).$$

Al linealizar esta ecuación alrededor del punto de equilibrio estable obtenemos la ecuación con retardo $x'(t) = \alpha x(t - \tau)$ para $t > 0$. Consideramos el caso con condición inicial constante en $-\tau \leq t \leq 0$. Empleamos el método de transformada de Laplace para encontrar soluciones y realizamos una exploración numérica para corroborar e interpretar los resultados en términos biológicos. Este trabajo hace parte del Semillero de Análisis Matemático de la Universidad Distrital – SAMAT.

Palabras & frases clave: Ecuación logística, ecuaciones diferenciales con retardo, transformada de Laplace.

Referencias

- [1] Cooke, Kenneth L. “Differential-difference equations.” *International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics*. Academic Press, 1963.
- [2] Amster, Pablo. “Ecuaciones diferenciales con retardo.” *Cursos y seminarios de matemática Serie B* (2017).
- [3] Pérez, Sabino. “Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo.” *Miscelanea Matemática*, 67, 57-71 pp (2018).

Schauder bases and James space

Author: Yeny Paola Moreno
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: yepaolita30@gmail.com

Abstract: Schauder's basis concept is a topological version of the basis concept for infinite-dimensional spaces. As their name indicates, these bases allow elements of a given space to be expressed as "linear combinations" of the elements of the base. This presentation focuses on exploring the concept of Schauder bases, and showing some important theorems. Finally, we will show a construction of the James space, and we will see that it has a Schauder basis.

Introduction

In the study of vector spaces the concept of base is very important; In the case of Banach spaces we have a more complete structure. It is known, for example, that in Banach spaces every Hamel base is uncountable. This in some way tells us that algebraic bases are not good for studying certain properties of Banach spaces (for example the approximation property). To explain what we mean, suppose that $\{x_i\}_{i \in A}$ is a Hamel basis on a real Banach space X and $x \in X$; then $x = \sum_{i \in A} a_i x_i$ where $\{a_i\}_{i \in A} \subset \mathbb{R}$ and $a_i = 0$ except for a finite set of indices. Is there a sequence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ with

$$z_n = \sum_{i \in A} a_i^{(n)} x_i$$

where $a_i^{(n)} \in \mathbb{R}$ is zero except for a finite set of $i \in A$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$? In general the answer is no. The above discussion motivates the following definition:

Definition 1: Let X be a Banach space over the field \mathbb{K} . A sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X is called a Schauder Basis if for all $x \in X$ there exists a unique sequence of scalars $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = 0.$$

We will see that the spaces ℓ_p with $1 \leq p < \infty$ have a Schauder basis. Finally, we will present a construction of James' space.

Definition 2: The James J space is the space of the real sequences $x = (a_1, a_2, \dots)$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ and such that

$$\|x\| = \sup \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

where the supremum is taken over all possible values of n and over all possibilities of finite sequences $p_1 < p_2 < \dots < p_{n+1}$ of natural numbers.

References

- [1] H. Fetter Nathansky and B. Gamboa: Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach. (2008)

Clustering para visualización de regiones de convergencia del método de homotopía

Autores: Rafael Andrés Ramos Pájaro¹, Jeovanny Muentes Acevedo²
 Universidad Tecnológica de Bolívar^{1,2}
 E-mail: pajaror@utb.edu.co¹, jmuentes@utb.edu.co²

Resumen: En este trabajo se propone el clustering como herramienta para la visualización de las regiones de convergencia de un método numérico para la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales como lo es el método de homotopía.

Introducción

Una **homotopía** entre dos funciones $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función $H : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{cases} H(x, 0) = g(x) & \text{para todo } x \in A \\ H(x, 1) = f(x) & \text{para todo } x \in A. \end{cases}$$

Utilizando homotopías podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales, como veremos a continuación: nuestro propósito es resolver el problema

$$f(x) = 0. \quad (19)$$

Para esto escogemos una función g tal que la ecuación $g(x) = 0$ tiene una solución conocida x_0 , es decir, $g(x_0) = 0$. Sea $H(x, t)$ una homotopía de g a f y considerar el problema

$$H(x, t) = 0. \quad (20)$$

Una **curva solución** de (20) es una función $x : [0, 1] \rightarrow A$ tal que

$$H(x(t), t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ y } x(0) = x_0.$$

Note que en este caso tenemos que

$$0 = H(x(1), 1) = f(x(1)),$$

es decir, $x(1)$ es solución del problema (19). Luego, $x(t)$ “conecta” la solución conocida x_0 con la solución $x(1)$ de nuestro problema inicial (19).

Clustering es una técnica de aprendizaje automático que agrupa puntos de datos similares en grupos o clústeres, basándose en algún criterio de similitud. En este trabajo utilizamos una herramienta de clustering con fines gráficos. Al repetir el proceso de cálculo de soluciones utilizando el método de homotopía para diferentes condiciones iniciales, observamos que los conjuntos de soluciones encontrados por el método forman clústeres. Luego, si agrupamos estos clústeres formados según la condición inicial de la que se originaron y los mapeamos, obtenemos una ilustración gráfica de cómo se ven las regiones de convergencia del método.

Nuestro trabajo consiste en lo siguiente:

- Implementar una herramienta de clustering que permita agrupar los conjuntos de soluciones obtenidas por el método de homotopía a partir de diferentes condiciones iniciales.
- Repetir el proceso de cálculo de soluciones utilizando el método de homotopía para diversas condiciones iniciales y observar la formación de clústeres entre los conjuntos de soluciones obtenidas.

- Evaluar la efectividad del clustering como herramienta de visualización en la comprensión y análisis de las regiones de convergencia del método de homotopía, destacando sus ventajas y posibles limitaciones.

Para la visualización de las regiones el tipo de *clustering* utilizado en este trabajo es K-means. K-means es un algoritmo de *clustering* muy utilizado y popular. Divide los datos en K clústeres, donde K es un número fijo elegido por el usuario. Cada clúster tiene un centroide que lo representa, y los puntos de datos se asignan al clúster más cercano. El uso de este algoritmo en este trabajo se debe a su simplicidad, eficiencia computacional y la distribución de los datos, lo cual hace que un algoritmo de *clustering* basado en centroides como K-means funcione muy bien. Existen métodos que nos permiten determinar el número óptimo de clústeres para nuestro conjunto de datos, como el método del perfil de silueta (*silhouette method*). Este número óptimo de clústeres coincide con el número de soluciones presentes en la región que estamos analizando para nuestro problema.

Una vez que las diferentes soluciones \mathbf{x}^* presentes en la región analizada de nuestro problema han sido segmentadas y asignadas a un clúster, procederemos a asignar las diferentes condiciones iniciales \mathbf{x}_0 al mismo clúster al que se ha asignado el \mathbf{x}^* emparejado con esa condición inicial.

Si pintamos las diferentes condiciones iniciales según los diferentes clústeres a los que terminan siendo asignadas y los valores de no convergencia, lo que obtenemos es un mapeo de cómo se ve la región de convergencia del método.

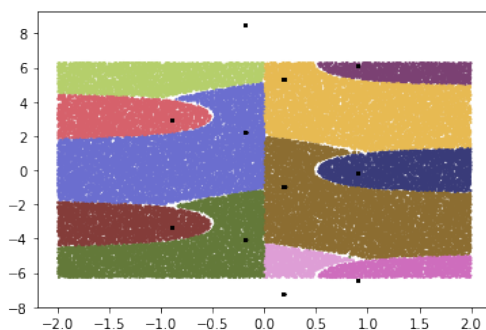


Figure 5: Región de convergencia sistema 2x2

Ejemplo 1. Sea $F(x, y) = (4x \sin y + 0.6, 4x^2 - 4x \cos y + 0.3)$. El sistema $F(x, y) = (0, 0)$ tiene infinitas soluciones. En la Figura (5) mostramos el clustering de la región de convergencia del método de homotopía para el sistema dado.

Para el clustering de este ejemplo se tomaron condiciones iniciales comprendidas en la región $x \in [-2, 2]$ y $y \in [-2\pi, 2\pi]$, en la cual se identifican un total de 11 soluciones, correspondientes a los puntos negros que se alcanzan a distinguir en la imagen.

Ejemplo 2. Sea $F(x, y, z) = (x(y - 2), y(x - 1), z)$. El clustering de la región de convergencia del método de homotopía para resolver el sistema $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es mostrado en la Figura (6).

Este sistema tiene dos soluciones $(0, 0, 0)$ y $(1, 2, 0)$. El clustering fue realizado para condiciones iniciales entre la región $x \in [-1, 4]$, $y \in [-1, 4]$ y $z \in [-2, 2]$. Las zonas en blanco representan regiones donde el método no realiza una buena convergencia, es posible identificar dos de esta grandes regiones delimitando las regiones de convergencia del método.

Conclusión

En este trabajo, hemos demostrado que el uso de técnicas de clustering, específicamente el algoritmo K-means, puede ser una herramienta eficaz para la visualización de las regiones de convergencia del método de homotopía. A través de ejemplos con sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, se ha observado cómo los diferentes conjuntos de soluciones pueden agruparse en clústeres, facilitando así la identificación y el análisis de las regiones de convergencia. Esta metodología no solo permite una mejor comprensión visual de dichas regiones, sino que también resalta las

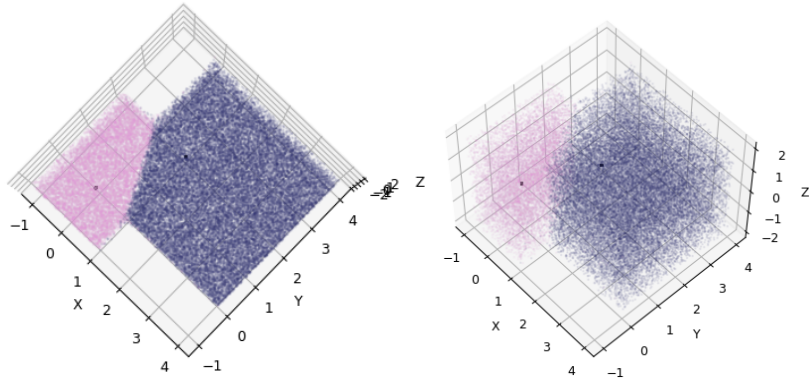


Figure 6: Regiones de convergencia de un sistema 3x3

ventajas del clustering como herramienta de análisis en la resolución de problemas numéricos complejos. Las futuras investigaciones podrían explorar la aplicación de otros algoritmos de clustering y técnicas avanzadas para mejorar aún más la visualización y comprensión de las regiones de convergencia en diversos contextos matemáticos y de ingeniería.

Referencias

- [1] Chiang, H-D., Morris W. Hirsch, and Felix Fulih Wu. "Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.1 (1988): 16-27.
- [2] Syai'in, Mat, and Kuo Lung Lian. "Microgrid power flow using homotopic and Runge-Kutta Method." *2015 IEEE 2nd International Future Energy Electronics Conference (IFEEEC)*. IEEE, 2015.
- [3] Chapra, Steven C. *Numerical methods for engineers*. Mcgraw-hill, 2010.
- [4] Lee, Jaewook, and Hsiao-Dong Chiang. "Convergent regions of the Newton homotopy method for nonlinear systems: theory and computational applications." *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48.1 (2001): 51-66.
- [5] Ortega, J. M., and Rheinboldt, W. C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. SIAM, 2000.
- [6] Spivak, Michael. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. CRC press, 2018.

Mejora de la eficiencia en urgencias: simulación de Montecarlo para la óptima asignación de personal

Autores: Santiago González Cruz¹, Adriana Romero Alfonso², Jorge Sanabria³
Universidad Central¹, Fundación Universitaria Konrad Lorenz²,
E-mail: sgonzalezc9@ucentral.edu.co¹, adrianac.romeroa@konradlorenz.edu.co²,
jorgea.sanabrief@konradlorenz.edu.co³

Resumen: Este proyecto se enfoca en la implementación de la simulación de Montecarlo con el propósito de analizar el proceso de atención a pacientes en el entorno de urgencias para adultos. La aplicación de esta técnica posibilita modelar de manera precisa y realista las diversas variables involucradas en el proceso, tales como la llegada de pacientes, los tiempos de espera y los posibles escenarios de congestión.

El objetivo primordial es identificar la cantidad óptima de personal requerido en la ventanilla de atención durante distintos momentos del día. La variabilidad en la afluencia de pacientes y la complejidad de las situaciones de urgencia hacen que la determinación de los recursos humanos sea crucial para asegurar un servicio eficiente.

El proceso de simulación se llevará a cabo mediante la generación de escenarios hipotéticos basados en datos históricos y parámetros específicos del entorno de urgencias para adultos. Se evaluarán diversas configuraciones de personal en la ventanilla para determinar cuál logra un equilibrio adecuado entre la capacidad de respuesta y la utilización eficiente de los recursos.

Los resultados obtenidos de la simulación de Montecarlo posibilitarán establecer recomendaciones concretas para la asignación óptima de personal en la ventanilla durante cada franja horaria.

Palabras & frases clave: Atención de urgencias, Simulación de Montecarlo, Optimización, Python.

Referencias

- [1] Smith, J., and A. Johnson. 'Optimization Models in Healthcare Resource Allocation'. *Journal of Medical Operations Research*, vol. 12, no. 3, 2018, pp. 157–175.
- [2] Hoot, R. 'Enhancing Emergency Room Efficiency: A Simulation Approach'. *Journal of Health Systems Research*, vol. 25, no. 2, 2019, pp. 89–105.
- [3] Jones, K., and M. Brown. 'Best Practices in Emergency Department Management'. *Healthcare Administration Review*, vol. 40, no. 4, 2021, pp. 321–335.
- [4] García, S. 'Improving Patient Flow in Emergency Departments: A System Dynamics Approach'. *Journal of Healthcare Engineering*, vol. 8, no. 2, 2017, pp. 143–158.
- [5] Patel, R., and L. White. 'Resource Allocation Strategies for Emergency Room Staffing'. *International Journal of Healthcare Management*, vol. 15, no. 1, 2022, pp. 45–62..
- [6] Robinson, P., and D. Smith. 'Simulation Methods for Healthcare Operations Management'. *Journal of Operations Research for Healthcare*, vol. 5, no. 1, 2016, pp. 15–28.
- [7] Taylor, M., and C. Miller. 'Optimizing Staffing Levels in Emergency Departments: A Case Study'. *Healthcare Operations Management*, vol. 20, no. 4, 2018, pp. 412–427..

Modelo para asignación de compensación a personal jefe por medio de curvas de nivel

Autores: Adriana Romero Alfonso¹, Santiago González Cruz², Jorge Sanabria³
Fundación Universitaria Konrad Lorenz¹, Universidad Central²
E-mail: adrianac.romeroa@konradlorenz.edu.co¹, sgonzalezc9@ucentral.edu.co²,
jorgea.sanabrief@konradlorenz.edu.co³

Resumen: El principal objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo que permita asignar bonos de compensación adicionales a jefes de área, según su desempeño y percepción del clima laboral del equipo de trabajo de la persona a evaluar. Para esto, uno de los requerimientos es diseñar una agrupación óptima de modo que se asigna un mismo valor a todas las personas que se encuentren en el mismo grupo. En este trabajo se acude al modelamiento de una función de dos variables para la creación de curvas de nivel dada la naturaleza, pesos y cantidad de dichas variables. Así mismo, las curvas de nivel, comprenden diversos problemas como la construcción de mapas, estudios climáticos, desarrollo de modelos predictivos, entre otros. Para el desarrollo del modelo se elige una escala a la cual se normalizan los datos de la variable desempeño, la cual es cuantitativa, así mismo en esta escala se asignan valores discretos a la variable percepción del clima laboral, la cual es cualitativa. Posteriormente, se ajusta la función de dos variables según los pesos de estas y se crean las curvas de nivel. Finalmente, la simulación del modelo se realiza en una primera fase generando datos de prueba los cuales son normalizados y finalmente agrupados en su respectiva área según lo defina las curvas de nivel con su valor monetario asignado.

Palabras & frases clave: Curvas de nivel, sistema de compensación, modelo matemático



Universidad Tecnológica de Bolívar