

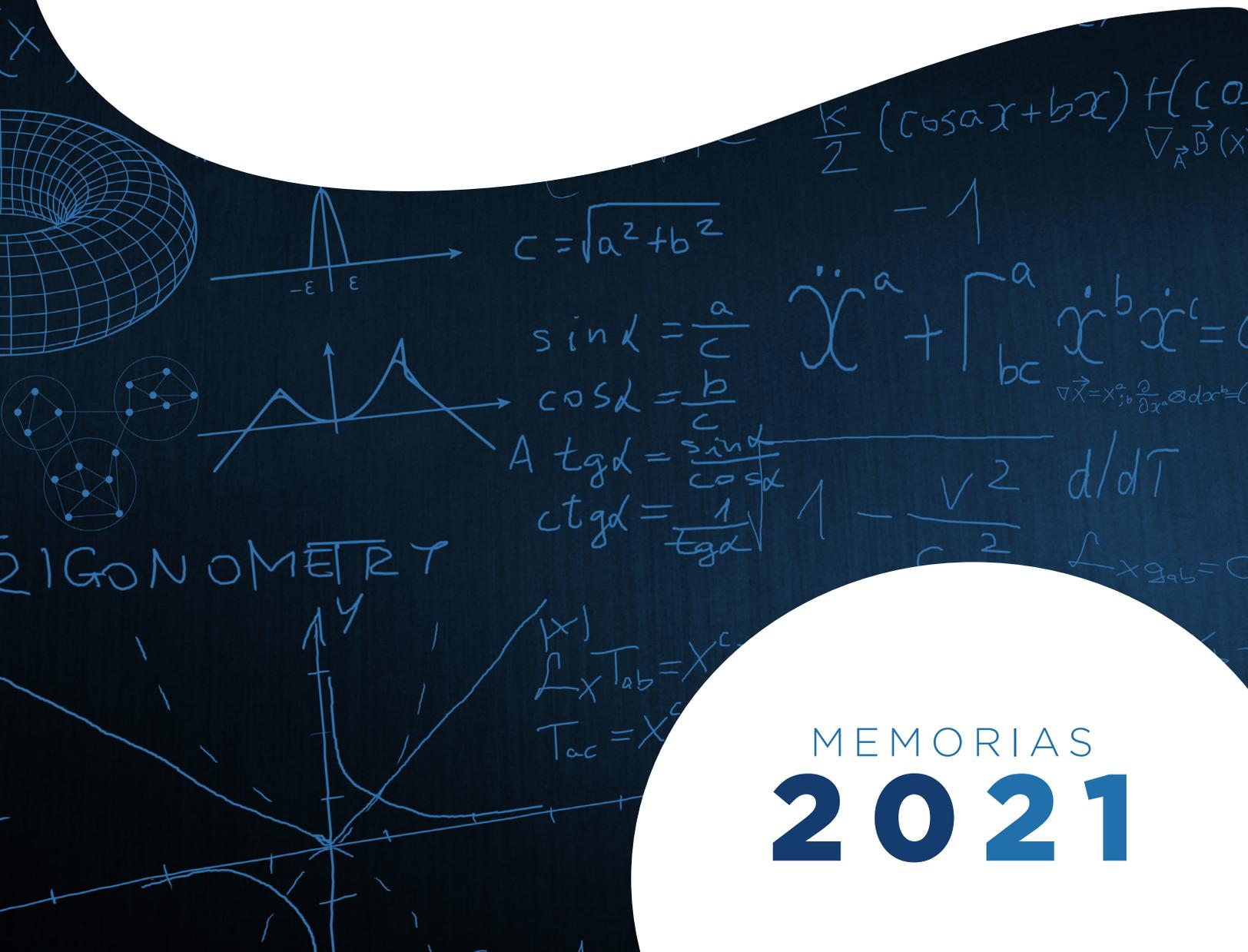


Universidad
Tecnológica
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS



III ENCUESTRO MATEMÁTICO DEL CARIBE

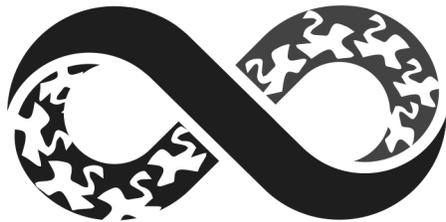


MEMORIAS
2021

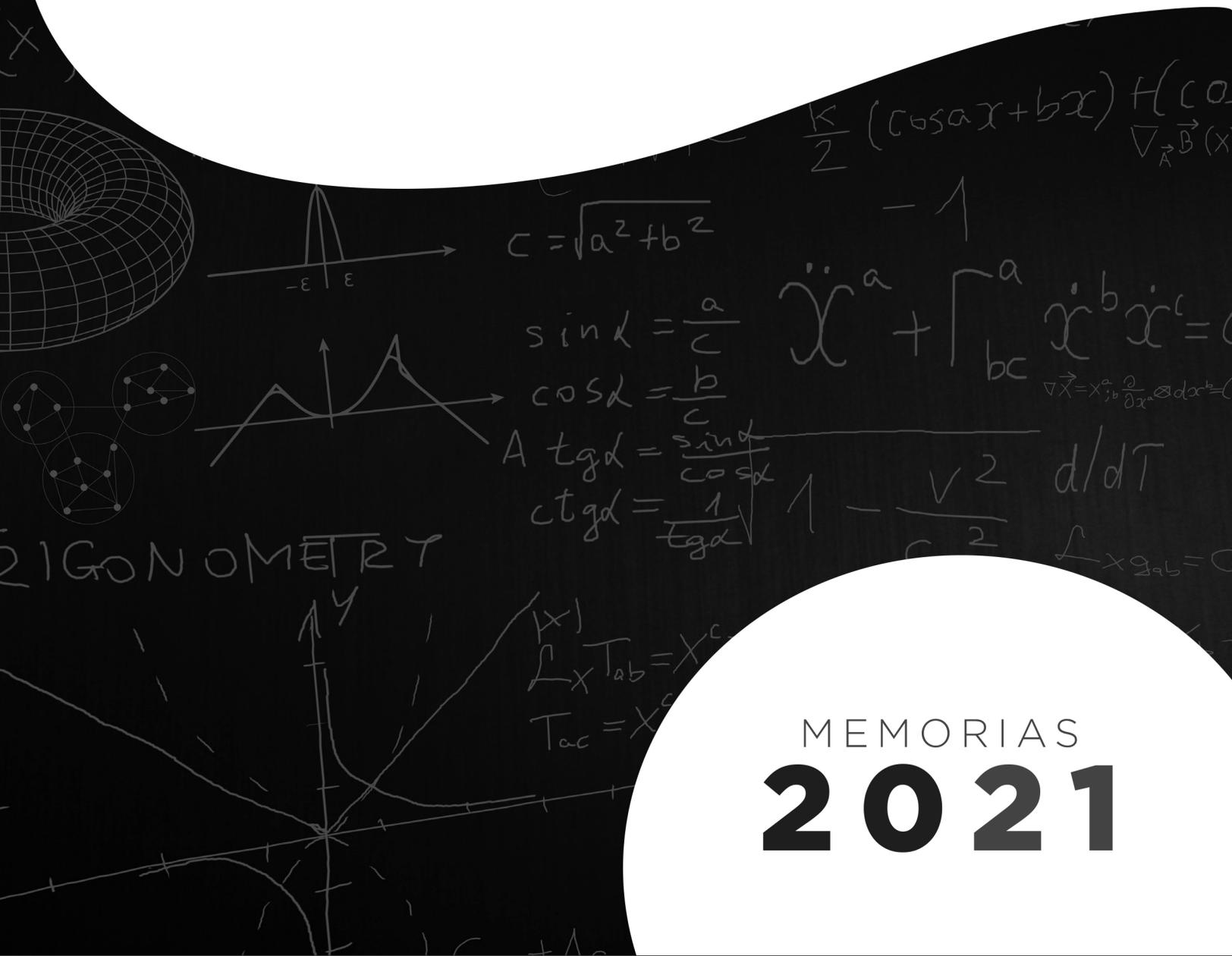


Universidad
Tecnológica
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS



III ENCUESTRO MATEMÁTICO DEL CARIBE



MEMORIAS
2021

COMITÉ ORGANIZADOR

Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo - Universidad Tecnológica de Bolívar
Jorge Luis Muñiz Olite - Universidad Tecnológica de Bolívar
Carlos Rafael Payares Guevara - Universidad Tecnológica de Bolívar
Andrea Estefanía Cabarcas Sánchez - Universidad Tecnológica de Bolívar

COMITÉ CIENTÍFICO

Andy Rafael Domínguez Monterroza - Universidad Tecnológica de Bolívar
Blanca Margarita Parra Mosqueda - Escuela Nacional de Estudios Superiores Unidad León, UNAM
Carlos Wilson Rodríguez Cardenas - Universidad Industrial de Santander
Carolina Tamayo Osorio - Universidade Federal de Minas Gerais
Catalina María Rúa Álvarez - Universidad de Nariño
César Adolfo Hernández Melo - Universidade Estadual de Maringá
César Augusto Nieto Acuña - Universidad de los Andes
Edith Johana Medina Hernandez - Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
Edwin Gonzalo Murcia Rodriguez - Pontificia Universidad Javeriana
Elkin Oveimar Quintero Vanegas - Universidade Federal do Amazonas
Fabián Antonio Arias Amaya - Universidad Tecnológica de Bolívar
Francisco de Jesus Arias Dominguez - Universidad del Norte
German Alonso Benitez Monsalve - Universidade Federal do Amazonas
Hector Edonis Pinedo Tapia - Universidad Industrial de Santander
Hector Jose Cabarcas Urriola - Universidad de Cartagena
Michael Alexander Rincon Villamizar - Universidad Industrial de Santander
Mikhail Malakhaltsev - Universidad de los Andes
Raibel de Jesus Arias Cantillo - Universidade Federal do Maranhão
Sergio Augusto Romaña Ibarra - Universidade Federal do Rio de Janeiro

RECTOR

Alberto Roa Varelo

VICERRECTOR ACADÉMICO

Daniel Toro González

VICERRECTORA ADMINISTRATIVA

María del Rosario Gutiérrez de Piñeres Perdomo

SECRETARIA GENERAL

Ana María Horrillo Caraballo

DECANA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Lenny Alexandra Romero Perez

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y EMPRENDIMIENTO

Jairo Useche Vivero

Diagramación

Ediciones UTB

ISSN: 2744-8835

Cartagena de Indias, D. T. y C., - Colombia

www.utb.edu.co

2021

**EDICIONES
UTB**



Prefacio

El Encuentro Matemático del Caribe tiene como finalidad reflexionar sobre el quehacer matemático y la enseñanza de las Matemáticas en el Caribe colombiano. Así mismo, extender las redes académicas con investigadores locales, nacionales e internacionales en las Ciencias Matemáticas. A través del encuentro se busca motivar a la comunidad de nuestra región a participar activamente en eventos matemáticos para conocer de primera mano la evolución y el amplio alcance que posee esta ciencia a nivel mundial por cuenta de los expositores.

La tercera versión del Encuentro Matemático del Caribe se realizó de forma remota del 14 al 17 de septiembre de 2021. En el mismo, se presentaron 52 conferencias, 7 minicursos abarcando las diferentes áreas de las Matemáticas y, adicionalmente, se realizaron las siguientes mesas redondas:

- **El papel de las Matemáticas frente al COVID-19:** Esta mesa redonda contó con la participación de Elizabeth González Patiño, coordinadora de desarrollo clínico del Instituto Butantan, Marlon Michael López Flores, pos-doctorando en Matemática Aplicada del IMPA, y César Augusto Nieto Acuña, quienes a partir de su experiencia en sus campos de actuación nos expusieron sobre la importancia y utilidad que han tenido las Matemáticas para afrontar la pandemia actual.
- **Mujeres líderes de proyectos matemáticos:** Luna Lomonaco, quien ha liderado varios proyectos de investigación en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Blanca Margarita Parra Mosqueda, quien es la coordinadora del Proyecto Lenguajes para aprender y comprender el mundo de la Escuela Nacional de Estudios Superiores Unidad León, UNAM, y Catalina María Rúa Álvarez, quien es coordinadora de las Olimpiadas Matemáticas regionales ORM UDENAR de la Universidad de Nariño, nos compartieron sus experiencias y trayectorias para llegar a liderar cada uno de sus proyectos.

En estas memorias presentaremos los resúmenes de las conferencias y minicursos que se impartieron durante el III Encuentro Matemático del Caribe. Las conferencias están organizadas por áreas: Sistemas Dinámicos, Teoría de Grafos y combinatoria, Topología, Álgebra, Geometría, Análisis, Matemática aplicada, Estadística y Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales, Educación y didáctica de las Matemática y finalmente se encuentran los minicursos impartidos. Los videos de las actividades realizadas se encuentran en la siguiente lista: [Videos del III Encuentro Matemático del Caribe](#).

El comité organizador reitera su agradecimiento a los conferencistas del evento, al comité científico, y al público asistente.

AGRADECIMIENTOS

Facultad de Ciencias Básicas - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Audiovisuales - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Comunicaciones - Universidad Tecnológica de Bolívar

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

Índice de conferencias y minicursos

Sistemas dinámicos

- Mating quadratic maps with the modular group 12
– Luna Lomonaco
- Sobre los espectros de Markov y Lagrange 13
– Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira
- Mapas multicríticos del círculo 14
– Gabriela Alexandra Estevez Jacinto
- Dimensión y recurrencia en sistemas dinámicos 15
– Alexander Paul Condori Huamán
- Probabilidades invariantes para sistemas lineales discretos vía formalismo termodinámico 18
– Victor Andrés Vargas Cubides
- Dinámica de una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower 19
– Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo Alape, Eduardo González Olivares
- El conjunto de funciones continuas con dimensión métrica media maximal es genérico 21
– Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

Teoría de grafos y combinatoria

- Diagonal sums of doubly stochastic matrices 24
– Geir Dahl
- Perron values and classes of trees 25
– Enide Cascais Silva Andrade
- A Note on the Estrada Index of the A_α -Matrix 26
– Jonnathan Alexander Rodriguez Zambrano, Hans Nina
- Sobre composiciones enteras y sus aplicaciones 27
– Wilson Olaya León, Jazmín L. Mantilla

Topología

- Reflexiones y productos tensores de grupos topológicos abelianos 33
– Julio César Hernández Arzusa
- An extension of the Carathéodory differentiability to set-valued maps 34
– John Beiro Moreno Barrios, Pedro Hurtado, Alex Leones, Mitchael Martelo

Álgebra

Hereditary species as monoidal decomposition spaces	38
– Wilson Javier Forero Baquero	
Sobre álgebras de Malcev que contienen la álgebra de Lie $\mathfrak{sf}_2(F)$	39
– Victor Hugo López Solís	
Recta proyectiva sobre anillos	40
– Jackson Guevara Gómez	
La conjetura de Hermite en dimensión Krull menor o igual a uno	42
– Astrid Liliana Contreras Mendoza, Claudia Inés Granados Pinzón	
Espacios profinitos y acciones parciales	44
– Andrés Yamith Villamizar Tarazona	
Sobre anillos epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados	46
– Luis Augusto Martínez Sánchez	
La Categoría de las p-Álgebras de Lie	48
– Carlos Rafael Payares Guevara	

Geometría

Minimal spheres in ellipsoids of revolution	51
– Renato Ghini Bettiol	
How to do differential geometry on non-smooth quotients?	52
– Cristian Andrés Ortiz González	
A class of singular polyhedral surfaces	53
– Marcel Vinhas Bertolini	
The deformation cohomology of symplectic groupoids	54
– Cristian Camilo Cárdenas	
Criterios de estabilidad en familias de hipersuperficies con CMC y frontera libre	55
– Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas	
Soluciones radiales a problemas de EDPS semilineales	58
– Edward Samuel Becerra Rojas, J. Galvis, N. Martinez	
Obligando a la existencia de órbitas de Reeb en $S^1 \times S^2$ <i>tight</i>	59
– Diego Alfonso Sandoval Salazar	

Análisis

- Some inequatlities of the Hermite-Hadamard type
for two kinds of convex functions 62
– Juan Gabriel Galeano Delgado, Juan E. Nápoles Valdés, Edgardo Pérez Reyes
- Desigualdades integrales via operadores fraccionarios
y generalizados 67
– Juan Eduardo Napoles Valdes
- Acerca de la Desigualdad de Simpson
via integrales generalizadas pesadas 70
– Florencia Rabossi
- Extrapolación en espacios de Köthe 72
– Víctor Juan Hernández Del Toro

Matemática aplicada

- A general condition for uniqueness in the
multi-marginal optimal transport 74
– Gustavo Adolfo Vargas Jiménez, Brendan Pass
- Un modelo de tráfico vehicular multiclase
con función de velocidad discontinua 77
– Rafael Enrique Ordoñez Cardales
- Maximization of the Weizsacker-Williams equation
in electro-positron annihilation and probability
of creation of heavy quarks 78
– Carlos Gabriel Moya Egoavil, Antonio I. Rivasplata Mendoza
- Diseño de un modelo de valor agregado basado en
sistemas dinámicos estocásticos 79
– José Gregorio Solorzano, Yolima Rocha Fontalvo, Yesika Paola Rojas Sandoval
- Modelo de optimización multi-objetivo para el problema
de localización-inventario y ruteo multi-escalón aplicado a
la cadena de suministro humanitaria 81
– Andrés Guillermo Angarita Monroy, Henry Lamos Díaz
- Multifractalidad en el Mercado de Criptomonedas 85
– Andy Rafael Domínguez Monterroza, Alexander Baracaldo

Estadística y probabilidad

- La estadística en el diseño de ensayos clínicos 87
– Elizabeth González Patiño
- Increasing the replicability for linear models 88
via adaptive significance levels
– Daiver de Jesús Velez Ramos
- Evolución en el liderazgo político de las mujeres latinoamericanas. 89
Un análisis X-STATIS desde datos CEPAL 2000-2020
– Edith Johana Medina Hernandez, Maria José Fernández Gómez
- Análisis multivariante de los habitantes de calle en Colombia 92
según datos del censo CHC-DANE-2019
– Deivinso Villa Moncaris, Jorge Luis Villalba Acevedo, Julio Seferino Hurtado

Ecuaciones diferenciales

- Estabilidad orbital de ondas estacionarias para la ecuación 94
de Schrödinger con potencial tipo delta de Dirac atractivo
y dupla potencia de tipo repulsivo en la no linealidad
– César Adolfo Hernández Melo
- L^p -Maximal regularity for a class of degenerate fractional 95
integro-differential equations in Banach spaces
– Rafael Antonio Aparicio Cuello, Valentin Keyantuo
- Lie symmetry method applied to the equation 98
of the orbit in Schwarzschild spacetime
– Danilo Andrés García Hernández
- La ecuación diferencial exacta generalizada 99
– Luciano Miguel Lugo Motta
- Un problema de temperatura y el método de capa límite 101
– Ruben Dario Ortiz Ortiz
- Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 102
de segundo orden no lineales
– Julio Castro Garcés

Educación Matemática

- Estudio longitudinal de tendencia acerca de la complejidad del enunciado y el desempeño de alumnado de nivel secundario con problemas verbales de comparación multiplicativa 104
– Maria Teresa Sanz, Emilia López-Iñesta, Daniel Garcia, Francisco Grimaldo
- Relación entre el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento de los temas y el conocimiento de la estructura de las Matemáticas: caso de dos profesores de Matemáticas uno de Colombia y otro de México 109
– Ever Pacheco, Oscar Paternina, Estela Juárez-Ruiz, Eric Flores-Medrano, Diana Zakaryan
- Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para el uso efectivo de las TIC en la enseñanza 111
– Iván Andrés Padilla Escorcía, Jenny Patricia Acevedo Rincón
- El pensamiento visual: un sistema de actividades en la enseñanza aprendizaje de las nociones geométricas en niños con TDAH de grado quinto de la básica primaria 114
– Osvaldo Jesús Rojas Velásquez, Randy Zabaleta Mesino

Minicursos

- Una breve introducción a los modelos de Ecuaciones Diferenciales aplicados a enfermedades infecciosas 117
– Marlon Michael López Flores
- Tópicos en Geometría de los números 118
– Raibel de Jesus Arias Cantillo
- GeoGebra en el aula 119
– Alexander Arévalo Soto, Diana H. Bueno-Carreño, Leonel Monroy Guzmán, Oswaldo Rodríguez Díaz
- Matemática y programación con Python 121
– Moises Ramón Quintana Álvarez
- Dynamics and Geometry 123
– Ronaldo Alves Garcia
- Descubriendo asteroides 124
– Yalaidys Hernandez, Raquel Rey, Angelica Tuñon, Clara Camargo, Daniel Herrera
- La Teoría APOE y la construcción de pensamiento matemático 125
– Solange Roa Fuentes

Sistemas Dinámicos

Mating quadratic maps with the modular group

Author: Luna Lomonaco
Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
E-mail: lunalomonaco@gmail.com

Abstract: Holomorphic correspondences are polynomial relations $P(z, w) = 0$, which can be regarded as multi-valued self-maps of the Riemann sphere, this is implicit maps sending z to w . The iteration of such a multi-valued map generates a dynamical system on the Riemann sphere: dynamical system which generalises rational maps and finitely generated Kleinian groups. We consider a specific 1-(complex)parameter family of (2:2) correspondences F_a (introduced by S. Bullett and C. Penrose in 1994), which we describe dynamically. In particular, we show that for every parameter in a subset of the parameter plane called "the connectedness locus" and denoted by M_Γ , this family behaves as rational maps on a subset of the Riemann sphere and as the modular group on the complement: in other words, these correspondences are mating between the modular group and rational maps (in the family $Per_1(1)$). Moreover, we develop for this family of correspondences a complete dynamical theory which parallels the Douady-Hubbard theory of quadratic polynomials, and we show that M_Γ is homeomorphic to the parabolic Mandelbrot set M_1 . This is joint work with S. Bullett (QMUL).

Sobre los espectros de Markov y Lagrange

Autor: Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira
Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
E-mail: gugu@impa.br

Resumen: Vamos a discutir algunos resultados recientes sobre la geometría fractal de los espectros clásicos de Markov e Lagrange M y L , de la teoría de aproximaciones diofánticas, e sobre sua diferencia $M \setminus L$ - en particular, mostramos en colaboración con Carlos Matheus que $M \setminus L$ tiene dimensión de Hausdorff estrictamente entre 0 y 1 (mas precisamente entre 0,531 y 0,888; muy recientemente, en colaboración con Pollicott y Vytova mejoramos esas estimativas para 0,537152 y 0,796445, respectivamente), y tiene elementos mayores que 3,7, lo que da contraejemplo a una conjetura de Cusick. Discutiremos cómo estos resultados están relacionados a dinámica simbólica, fracciones continuas, y al estudio de la geometría fractal de sumas aritméticas de conjuntos de Cantor regulares, un tema también relevante para el estudio de bifurcaciones homoclínicas.

Mapas multicríticos del círculo

Autora: Gabriela Alexandra Estevez Jacinto
Universidade Federal Fluminense
E-mail: gaestevezja@gmail.com

Resumen: Estudiamos homeomorfismos del círculo con un número finito de puntos críticos "inflexivos" y sin puntos periódicos, los llamados mapas multicríticos del círculo. Las propiedades topológicas de estas funciones se conocen bien. Nos interesa saber cuáles son las condiciones que hacen que las propiedades topológicas determinen propiedades geométricas. En esta charla, discutiremos algunos resultados recientes relacionados con esta pregunta.

Palabras clave: Rigidez, renormalización, real bounds, complex bounds.

Referencias

- [1] Estevez, Gabriela, and Pablo Guarino. "Renormalization of multicritical circle maps." *Submitted*.
- [2] Estevez, Gabriela, Daniel Smiana, and Michael Yampolsky. "Complex a priori bounds for multicritical circle maps with bounded type rotation number." *arXiv preprint arXiv:2005.02377* (2020).

Dimensión y recurrencia en sistemas dinámicos

Autor: Alexander Paul Condori Huamán
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
E-mail: alexander.condori@unsch.edu.pe

Resumen: Uno de los principales problemas estudiados en sistemas dinámicos se refiere a la descripción cuantitativa del fenómeno de recurrencia para un sistema dinámico. El problema de recurrencia fue inicialmente estudiado por Poincaré, quien afirmó que cualquier sistema dinámico que conserva una medida invariante finita exhibe una recurrencia no trivial para cada conjunto de medida positiva (una información de naturaleza cualitativa).

Boshernitzan (1993) demostró un resultado cuantitativo que vincula el primer tiempo de retorno a bolas de pequeño radio con la medida de Hausdorff de la respectiva medida invariante. Barreira y Saussol (2001), siguiendo la idea de Boshernitzan, mostraron que el comportamiento asintótico típico (con respecto a una medida invariante) de las tasas de retorno polinomial a una bola cuyo radio tiende a cero, estaban relacionadas con las dimensiones locales de esta medida invariante (en espacios de dimensión topológica finita).

En esta conferencia, se presentarán algunos resultados para procesos estocásticos estacionarios discretos con valores en un espacio Polonés M , relacionando tasas de recurrencia y la dimensión local de medidas invariantes, según los resultados obtenidos en [1, 2].

Palabras clave: dimensión de Hausdorff, tasas de recurrencia, medidas invariantes

Introducción

Sea (X, d) es un espacio métrico, $\mathcal{B}(X)$ la σ -álgebra de Borel de X y $f : X \rightarrow X$ una aplicación medible.

Definición 1. Sea μ una medida de probabilidad definida sobre el espacio medible $(X, \mathcal{B}(X))$. Decimos que μ es **f -invariante** (o que f preserva μ) si $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}(X)$. Denotaremos por $\mathcal{M}(f)$ el conjunto de todas las medidas invariantes por f .

Además, dotamos $\mathcal{M}(f)$ (el espacio de todas las medidas f -invariantes) con la topología débil-* (esto es, la topología más gruesa para la cual la red $\{\mu_\alpha\}$ converge a μ si, y solamente si, $\int f d\mu_\alpha \rightarrow \int f d\mu$ para cada función continua y limitada f). Desde que X es completo y separable, $\mathcal{M}(f)$ es también completo y separable, y es compacto si lo es X .

Definición 2. Sea (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. Una medida f -invariante es llamada **ergódica** si para cada $B \in \mathcal{B}$ satisfaciendo $f^{-1}(B) = B$ se tiene que $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = 1$.

Denotamos, además, por $\mathcal{M}_e(f)$ el conjunto de medidas f -ergódicas y por $\mathcal{M}_p(f)$ el conjunto de medidas f -periódicas, esto es, las medidas f -invariantes que están soportadas en órbitas f -periódicas; es claro que $\mathcal{M}_e(f)$ y $\mathcal{M}_p(f)$ están dotados de la topología (metrizable) inducida por $\mathcal{M}(f)$.

Sea (M, ρ) un espacio polonés, y sea S su σ -álgebra de conjuntos Borel. Ahora, defina (X, \mathcal{B}) como el producto bilateral de un número contable de copias de (M, S) . Note que \mathcal{B} coincide la σ -álgebra de los conjuntos de Borel en la topología del producto. Sea d cualquier métrica en X que es compatible con la topología del producto (es decir, d induce una topología equivalente). Es sencillo probar que (X, d) también es un espacio métrico polaco.

Se puede definir en X el llamado operador de desvío completo (full-shift), T , por la acción

$$Tx = y,$$

donde $x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_n, \dots)$, $y = (\dots, y_{-n}, \dots, y_n, \dots)$, y para cada $i \in \mathbb{Z}$, $y_i = x_{i-1}$. T es claramente un homeomorfismo de X sobre sí mismo. Elegimos d de tal manera que T y T^{-1} sean transformaciones de Lipschitz; establecer, por ejemplo, para cada $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \sum_{|n| \geq 0} \frac{1}{2^{|n|}} \frac{\rho(x_n, y_n)}{1 + \rho(x_n, y_n)}. \quad (1)$$

Dado $\mu \in \mathcal{M}(T)$, la tripla (X, T, μ) se denomina proceso estocástico estacionario discreto valorado en M (ver [5]).

El estudio de las propiedades genéricas (en el sentido de Baire) de tales procesos estocásticos estacionarios discretos con valores en M se remonta a los trabajos de Parthasarathy [5] (con respecto a la ergodicidad) y Sigmund (con respecto a la positividad de la medida en conjuntos abiertos, entropía cero de la medida para $M = \mathbb{R}$).

Definición 3 (Dimensión inferior y superior de Hausdorff y de empaquetamiento de una medida [4]). *Sea μ una medida positiva de Borel en (X, \mathcal{B}) . Las dimensiones inferior y superior de Hausdorff y de empaquetamiento de μ son definidas, respectivamente, como*

$$\begin{aligned} \dim_{\bar{K}}(\mu) &= \inf\{\dim_K(E) \mid \mu(E) > 0, E \in \mathcal{B}\}, \\ \dim_{\dagger K}(\mu) &= \inf\{\dim_K(E) \mid \mu(X \setminus E) = 0, E \in \mathcal{B}\}, \end{aligned}$$

donde K representa H (Hausdorff) o P (empaquetamiento); aquí, $\dim_{H(P)}(E)$ representa la dimensión Hausdorff (empaquetamiento) del conjunto Borel E (vea [4] para detalles).

Definición 4 (Dimensión local inferior y superior de una medida). *Sea μ una medida de Borel finita sobre X . Definimos la dimensión local inferior y superior de μ en $x \in X$ como*

$$\bar{d}_\mu(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} \quad \text{and} \quad \underline{d}_\mu(x) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon},$$

si, para cada $\varepsilon > 0$, $\mu(B(x; \varepsilon)) > 0$; caso contrario, $\bar{d}_\mu(x) := +\infty$.

Una importante relación entre las dimensiones locales y la dimensión inferior y superior de Hausdorff y de empaquetamiento de una medida es dada por la Proposición 1.1 en [2].

Las tasas de retorno polinomial de la órbita T de un punto dado a vecindades arbitrariamente pequeñas de sí mismo (esto da, en cierto sentido, una descripción cuantitativa de la recurrencia de Poincaré) fueron estudiadas por Barreira y Saussol en [3]. Dado un espacio métrico separable X y una transformación medible de Borel T , ellos definen las tasas de recurrencia superior e inferior de $x \in X$ de la siguiente manera: para cada $r > 0$ fijo, sea

$$\tau_r(x) = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid T^k x \in \bar{B}(x, r)\}$$

ser el tiempo de retorno de un punto $x \in X$ a la bola cerrada $\bar{B}(x, r)$; entonces,

$$\underline{R}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \quad \text{y} \quad \bar{R}(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r}$$

son, respectivamente, las tasas de recurrencia inferior y superior de $x \in X$. Note que $\tau_r(x)$ Puede ser infinita en un conjunto de μ -medida cero.

Barreira y Saussol demostraron (Teorema 2 en [3]) que $\underline{R}(x) \leq \dim_H^+(\mu)$ para μ -c.t.p. $x \in X$. Ello también mostraron, cuando $X \subset \mathbb{R}^n$, que $\underline{R}(x) \leq \underline{d}_\mu(x)$, y que $\overline{R}(x) \leq \overline{d}_\mu(x)$ para μ -c.t.p. $x \in X$. Luego, Saussol mostró en [6] que, bajo la hipótesis de que T es una transformación de Lipschitz, $h_\mu(T) > 0$, y que el decaimiento de las correlaciones de (X, T, μ) es superpolinomial, $\underline{R}(x) = \underline{d}_\mu(x)$, y $\overline{R}(x) = \overline{d}_\mu(x)$ para μ -c.t.p. $x \in X$. De hecho, es conocido que si el decaimiento de las correlaciones de (X, T, μ) es superpolinomial con respecto a los observables de Lipschitz y $d_\mu(x) := \underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x)$ para μ -c.t.p. $x \in X$, entonces $\overline{R}(x) = \underline{R}(x) = d_\mu(x)$ para μ -c.t.p. $x \in X$.

En esta conferencia, presentamos algunos resultados, para procesos estocásticos estacionarios discretos con soporte en M , relacionando \underline{R} (respectivamente, \overline{R}) y \underline{d}_μ (respectivamente, \overline{d}_μ).

Referencias

- [1] Carvalho, Silas L., and Alexander Condori. "Generalized fractal dimensions of invariant measures of full-shift systems over compact and perfect spaces: generic behavior." *Forum Mathematicum*. Vol. 33. No. 2. De Gruyter, 2021.
- [2] Carvalho, Silas L., and Alexander Condori. "Generic properties of invariant measures of full-shift systems over perfect Polish metric spaces." *Stochastics and Dynamics* (2021): 2150040.
- [3] Barreira, Luis, and Benoît Saussol. "Hausdorff Dimension of Measures via Poincaré Recurrence." *Communications in Mathematical Physics* 219.2 (2001): 443-463.
- [4] Mattila, Pertti, Manuel Morán, and José-Manuel Rey. "Dimension of a measure." *Studia Math* 142.3 (2000): 219-233.
- [5] Parthasarathy, Kalyanapuram Rangachari. "On the category of ergodic measures." *Illinois Journal Mathematics* 5(1961): 648-656.
- [6] Saussol, Benoît. "Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems." *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 15 (2006): 259-267.

Probabilidades invariantes para sistemas lineales discretos vía formalismo termodinámico

Autor: Victor Andrés Vargas Cubides
Universidad Nacional de Colombia
E-mail: vavargascu@gmail.com

Resumen: Estamos interesados en mostrar existencia de medidas de probabilidad invariantes σ -aditivas con soporte total sobre X para una clase de shifts con peso $L : X \rightarrow X$, donde X es el espacio de Banach $c_0(\mathbb{R})$ o $l^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$. En orden de obtener tales medidas, adaptamos ideas del formalismo termodinámico clásico. Fijando un potencial Hölder continuo $A : X \rightarrow \mathbb{R}$, asociamos un operador de transferencia \mathcal{L}_A (dependiendo del operador lineal L), el cual actúa sobre el conjunto de funciones continuas sobre X y demostramos que dicho operador satisface el Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. Más aún, la medida de probabilidad invariante ergódica para L , resulta en una probabilidad de Gibbs asociada al potencial A . Para probar lo anterior, consideramos la acción del dual del operador de transferencia sobre el espacio 1-Wasserstein de probabilidades sobre X .

Trabajo en colaboración con A. O. Lopes (IME-UFRGS), A. Messaoudi (IBILCE-UNESP) y M. Stadlbauer (IM-UFRJ).

Referencias

- [1] Lopes, Artur O., Ali Messaoudi, Manuel Stadlbauer and Victor Vargas. "Invariant Probabilities for Discrete Time Linear Dynamics via Thermodynamic Formalism." [arXiv:1910.04902](https://arxiv.org/abs/1910.04902) (2019)

Dinámica de una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower

Autores: Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo Alape,
Eduardo González Olivares
Universidad del Quindío, Universidad del Tolima, Pontificia Universidad Católica de
Valparaíso
E-mail: pctintinago@uniquindio.edu.co, ldrestrepoa@ut.edu.co, ejgonzal@ucv.edu.cl

Resumen: En este trabajo, se analiza un modelo de depredador-presa del tipo Leslie-Gower, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, considerando dos aspectos: una respuesta funcional racional de los depredadores sigmoidea o Holling tipo III, y la función de los depredadores es de tipo logístico.

Se determinan las condiciones en el espacio de parámetros para la existencia de los puntos de equilibrio y la naturaleza de cada uno de ellos, se demuestra la existencia de una curva separatriz que divide el comportamiento de las trayectorias las cuales pueden tener diferentes ω límites, entonces las soluciones son altamente sensibles a las condiciones iniciales.

Por simulaciones numéricas mostramos un ciclo límite originado por bifurcación de Hopf y comprobamos que existen ciclos límites no infinitesimales para un subconjunto de parámetros.

Palabras clave: Modelo presa-depredador, respuesta funcional, bifurcación, ciclo límite, curva separatriz, estabilidad.

Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar un modelo de depredación tiempo continuo, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales bidimensionales (planares); que corresponde a un modelo tipo Leslie-Gower [5], cuya característica fundamental es que la ecuación que describe el crecimiento de los depredadores es del tipo logístico [5]. En estos modelos, la capacidad de soporte (environmental carrying capacity) de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas disponibles, esto es, $Ky = K(x) = nx$.

La respuesta funcional, también llamada función de captura o consumo se refiere al cambio de la densidad de las presas atacadas en la unidad de tiempo por depredador, cuando la densidad de las presas cambia [4]. Fueron clasificadas por C. S. Holling (1959) [1, 5], quien describió tres tipos de respuesta funcional. Posteriormente Taylor en 1984 propuso un cuarto tipo llamada respuesta funcional no monotónica.

En este trabajo se tiene en cuenta una respuesta funcional racional de los depredadores del tipo sigmoidea (del tipo Holling III), expresada por la función $h(x) = \frac{qx^2}{x^2+bx+a}$ usada en [3]. Biológicamente da cuenta del hecho que a bajas densidades de población de presas el efecto de la depredación es bajo, pero, a medida que aumenta la densidad de presas, la depredación es más intensa. Este fenómeno se da en variadas interacciones de la realidad y en tal caso se dice que el depredador es generalista, debido a que si el número de presas es bajo, busca otras alternativas de alimentación [2].

El modelo es descrito por el sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov:

$$X_{\mu} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qx y}{x^2+bx+a} \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= s \left(1 - \frac{y}{n x} \right) y \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ representan las poblaciones de presas y depredadores, como funciones del tiempo, y todos los parámetros son positivos; $\mu = (r, q, a, s, K, n, b) \in \mathbb{R}_+^7$.

Referencias

- [1] Freedman, Herbert I. *Deterministic mathematical models in population ecology*. Vol. 57. Marcel Dekker Incorporated, 1980.
- [2] González-Olivares, Eduardo, Paulo C. Tintinago-Ruiz, and Alejandro Rojas-Palma. "A Leslie-Gower-type predator-prey model with sigmoid functional response." *International Journal of Computer Mathematics* 92.9 (2015): 1895-1909.
- [3] Lamontagne, Yann, Caroline Coutu, and Christiane Rousseau. "Bifurcation analysis of a predator-prey system with generalised Holling type III functional response." *Journal of Dynamics and Differential Equations* 20.3 (2008): 535-571.
- [4] Gonzalez Olivares, Eduardo Jaime, and Pablo C. Tintinago Ruiz. "A class of Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid functional response." *Proceedings of the 2013 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2013* (I. Hamilton and J. Vigo-Aguiar eds.) Volume 4 1310-1321.
- [5] Turchin, P. "Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis. Princeton (NJ): Princ. Univ. Press, 2003. 456 p." *Monographs in Population Biology*.

El conjunto de funciones continuas con dimensión métrica media maximal es genérico

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo
 Universidad Tecnológica de Bolívar
 E-mail: jmuentes@utb.edu.co

Resumen: La dimensión métrica media es una cota superior de la dimensión media de sistemas dinámicos definidos en espacios topológicos compactos, el cual es un invariante por conjugaciones topológicas. En esta conferencia mostraremos que el conjunto de funciones continuas, definidas en una variedad, con dimensión métrica media igual a la dimensión de la variedad es residual.

Palabras clave: Dimensión métrica media, dimensión topológica, dimensión de Minkowski, entropía topológica, herradura

Introducción

Sea $\phi : X \rightarrow X$ una función continua en un espacio métrico compacto X equipado con una métrica d . Denotamos por

$$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(X, d, \phi) \quad \text{y} \quad \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(X, d, \phi),$$

la **dimensión métrica media inferior** y la **dimensión métrica media superior** de (X, d, ϕ) respectivamente (ver [1] y [2] para estas definiciones).

Para toda función continua $\phi : X \rightarrow X$ tenemos que

$$0 \leq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(X, d, \phi) \leq \overline{\text{dim}}_{\text{B}}(X, d) \quad \text{y} \quad 0 \leq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(X, d, \phi) \leq \underline{\text{dim}}_{\text{B}}(X, d), \quad (2)$$

donde $\underline{\text{dim}}_{\text{B}}(X, d)$ y $\overline{\text{dim}}_{\text{B}}(X, d)$ denotan la box dimensión inferior y superior de X , respectivamente.

El proposito de esta conferencia es mostrar que si N es una variedad riemanniana compacta n -dimensional con métrica riemanniana d , entonces el conjunto de funciones continuas en N tal que su dimensión métrica media superior es igual a n es residual en $C^0(N)$. A continuación presentamos una idea de la prueba.

Una n -caja rectangular cerrada es un producto $J^n = J_1 \times \cdots \times J_n$ de sub-intervalos cerrados J_i para todo $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por J^n a una n -caja rectangular cerrada y tomemos

$$|J^n| := \min_{i=1, \dots, n} |J_i|, \quad \text{donde} \quad J^n = J_1 \times \cdots \times J_n.$$

Para cualquier intervalo cerrado $J = [a, b]$, sea $\hat{J} = [\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}]$. Para una n -caja rectangular cerrada $J^n = J_1 \times \cdots \times J_n$, tome $\hat{J}^n = \hat{J}_1 \times \cdots \times \hat{J}_n$ (ver Figura 1(a)).

Para $\epsilon \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$, decimos que una n -caja rectangular cerrada $J^n \subset U \subset \mathbb{R}^n$ es una (n, ϵ, k) -herradura fuerte para una función continua $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $|J^n| > \epsilon$ y J^n contiene k n -cajas rectangulares cerradas $J_1^n, \dots, J_k^n \subseteq J^n$, con $(J_s^n)^\circ \cap (J_r^n)^\circ = \emptyset$ para $s \neq r$, tal que $|J_i^n| > \frac{|J^n|}{2\sqrt[n]{k}}$ y $J^n \subset (\phi(\hat{J}_i^n))^\circ$ para todo $i = 1, \dots, k$. En la Figura 1(b) presentamos un ejemplo de una $(2, \epsilon, 20)$ -herradura fuerte.

Decimos que $\phi \in C^0(N)$ tiene una (n, ϵ, k) -herradura fuerte J^n , donde $J^n \subset \mathbb{R}^n$ es una n -caja rectangular cerrada, si existen s cartas exponenciales $\exp_i : B(0, \delta_N) \rightarrow N$, para $i = 1, \dots, s$, tal que:

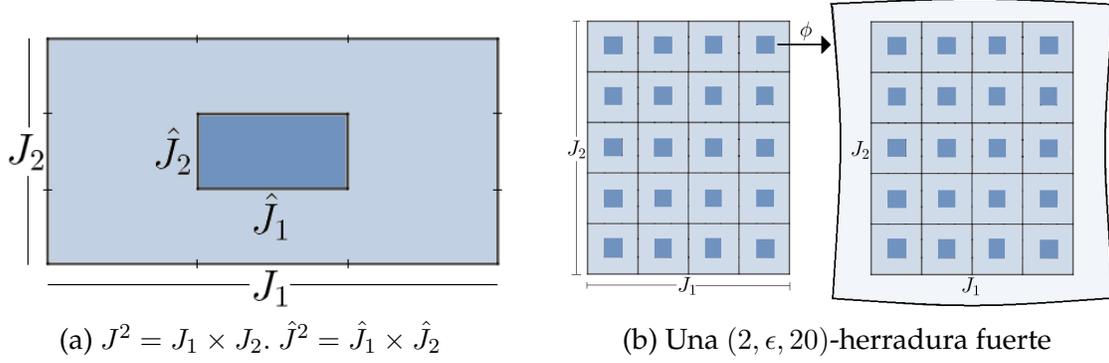


Figura 1: Herradura fuerte

- $\phi_i = \exp_{(i+1) \bmod s} \circ \phi \circ \exp_i^{-1} : B(0, \delta) \rightarrow B(0, \delta_N)$ es bien definido para algún $\delta \leq \delta_N$;
- $J^n \subset (\phi_i(J^n))^\circ$ para cada $i = 1, \dots, s$;
- J^n es una (n, ϵ, k) -herradura fuerte para ϕ_i para cada $i = 1, \dots, s$.

Para simplificar la notación, tomemos $\phi_i = \phi$ para cada $i = 1, \dots, s$.

Para $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, sea

$$H(n, \epsilon, k) = \{\phi \in C^0(N) : \phi \text{ tiene una } (n, \epsilon, k)\text{-herradura fuerte}\}$$

$$H(n, k) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H\left(n, \frac{1}{i^2}, 3^{n k i}\right)$$

$$\mathcal{H}^n = \bigcap_{k=1}^{\infty} H(n, k).$$

En esta conferencia mostraremos el siguiente teorema (ver [1], [2]):

Teorema 5. \mathcal{H}^n es residual y si $\phi \in \mathcal{H}^n$, entonces $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = n$. Por lo tanto, para cualquier $n \geq 1$, si N es una variedad riemanniana compacta de dimensión n con métrica d , el conjunto

$$\overline{C}_n(N) = \{\phi \in C^0(N) : \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = n\}$$

es residual en $C^0(N)$, donde $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi)$ denota la dimensión métrica media de una función continua $\phi \in C^0(N)$.

Referencias

- [1] Acevedo, Jeovanny de Jesus Muentes. "Genericity of continuous maps with positive metric mean dimension." *Results in Mathematics* (2021).
- [2] Rodrigues, Fagner B., and Jeovanny Muentes Acevedo. "Mean dimension and metric mean dimension for non-autonomous dynamical systems." *Journal of Dynamical and Control Systems* (2021): 1-27.

Teoría de grafos y combinatoria

Diagonal sums of doubly stochastic matrices

Author: Geir Dahl
University of Oslo
E-mail: geird@math.uio.no

Abstract: An $n \times n$ real matrix is called doubly stochastic if it is entrywise nonnegative and every row and column sum is 1. These matrices arise in several areas, such as combinatorics, matrix theory, probability and in linear and combinatorial optimization. We study the diagonals of matrices in Ω_n . (A diagonal is a set of positions with exactly one from each row and each column.) The main question considered is: which $A \in \Omega_n$ are such that the diagonals in A that avoid the zeros of A all have the same sum of their entries. We give a characterization of such matrices, and establish several classes of patterns of such matrices.

The talk gives some introduction to this class of matrices, and then discuss some of results obtained related to the mentioned main question.

The presentation is based on the recent paper [1]. (Joint work with Richard A. Brualdi, Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, USA.)

Keywords: Doubly stochastic matrix, diagonal sum, patterns.

References

- [1] Brualdi, Richard A., and Geir Dahl. "Diagonal sums of doubly stochastic matrices." *Linear and Multilinear Algebra* (2021): 1-27.

Perron values and classes of trees

Author: Enide Cascais Silva Andrade
Universidade de Aveiro
E-mail: enide@ua.pt

Abstract: Different combinatorial Perron parameters were introduced in [1, 2]. They are related to the algebraic connectivity of trees. We continue the study of these parameters and find explicit expressions for certain interesting classes of trees. Moreover, some new good bounds are determined, and some computational comparisons are made.

Joint work with Geir Dahl (University of Oslo) and Lorenzo Ciardo (University of Oxford).

Keywords: Perron value; bottleneck matrix; tree; special trees

References

- [1] Andrade, Enide, and Geir Dahl. "Combinatorial Perron values of trees and bottleneck matrices." *Linear and Multilinear Algebra* 65.12 (2017): 2387-2405.
- [2] Andrade, Enide, Lorenzo Ciardo, and Geir Dahl. "Combinatorial Perron parameters for trees." *Linear Algebra and its Applications* 566 (2019): 138-166.

A Note on the Estrada Index of the A_α -Matrix

Autor: Jonnathan Alexander Rodriguez Zambrano, Hans Nina
 Universidad de Antofagasta

E-mail: jonnathan.rodriguez@uantof.cl, hans.nina@uantof.cl

Abstract: Let G be a graph on n vertices. The Estrada index of G is an invariant that is calculated from the eigenvalues of the adjacency matrix of a graph. V. Nikiforov study hybrids of $A(G)$ and $D(G)$ and define the A_α matrix for every real $\alpha \in [0, 1]$ as

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G).$$

In this paper, using a different demonstration technique, we present a way to compare the Estrada index of the A_α -matrix with the Estrada index of the adjacency matrix of the graph G . Furthermore, lower bounds for the Estrada index are established

Keywords: Estrada index, α -Adjacency matrix, Adjacency matrix, Laplacian matrix

References

- [1] Nikiforov, Vladimir. "Merging the A and Q -spectral theories." *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 11.1 (2017): 81-107.
- [2] Rodríguez, Jonnathan, and Hans Nina. "A Note on the Estrada Index of the A_α -Matrix." *Mathematics* 9.8 (2021): 811.
- [3] Rodríguez, Jonnathan. "A note on new bounds for the Estrada Index." *Linear Algebra and its Applications* 580 (2019): 121-127.

Sobre composiciones enteras y sus aplicaciones

Autores: Jazmín L. Mantilla, Wilson Olaya León
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: jazlismaro@hotmail.com, wolaya@uis.edu.co

Resumen: En esta charla presentamos una introducción a las composiciones de números enteros y su aplicación a los autómatas. Se introducen los conceptos básicos de la teoría de composiciones y los temas actuales de investigación en esta área. En particular, se muestran las composiciones con restricciones en el conjunto de las partes y mostraremos la conexión que existe entre este tipo de composiciones y los números generalizados de Fibonacci (k -bonacci). Las composiciones palíndromas y de Carlitz, que se obtienen al restringir la ubicación de las partes en la composición, y las composiciones n -coloreadas, que son una generalización de las composiciones clásicas y se obtienen al colorear las partes de la composición con n colores. A lo largo de la charla mostraremos los códigos en sagemath para obtener cada uno de estos tipos de composiciones y para finalizar se mostrará una aplicación de las composiciones a los autómatas finitos.

Palabras clave: Composiciones Palíndromas, Composiciones de Carlitz, Composiciones Coloreadas, Números de Fibonacci, Autómatas.

Introducción

La composición de números enteros es un área de investigación fundamental en la combinatoria enumerativa y la teoría de números, que busca establecer las formas en las que se puede representar un entero positivo como suma de enteros positivos menores o iguales a él. Aunque la primera publicación sobre composiciones, titulada *Memoir on the Theory of Compositions of a Number* fue realizada por Percy Alexander MacMahon en 1893, sus orígenes se atribuyen a los trabajos realizados por Leonard Euler en el siglo XVIII. En [7] MacMahon introdujo un gráfico lineal para cada composición y logró probar, usando combinatoria y funciones generatrices, las fórmulas para el total de composiciones para n , las composiciones de n con exactamente m partes, y las composiciones palíndromas. Sin embargo, solo fue hasta finales de la década de los 60 del siglo pasado, que surgieron artículos sobre diferentes aspectos de las composiciones, en los que se estudiaron, entre otras cosas, el total de composiciones con cierto tipo de restricciones. No obstante, en las dos últimas décadas se han hecho la mayoría de las publicaciones sobre composiciones, en las cuales se introducen nuevos tipos de composiciones y métodos para evitar patrones de subsecuencias en composiciones, lo cual da una aplicación a los autómatas finitos.

Una *composición* de un entero n es una secuencia de enteros positivos $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$ tales que $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_l = n$. Los sumandos σ_i son llamados las partes de la composición y l es el número de partes. Por ejemplo, las composiciones de 5 son:

$$(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), \\ (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1).$$

En la literatura se conocen diversas restricciones sobre las composiciones de un entero. Una primera forma es restringir el número de partes en la composición. Por ejemplo, las composiciones de 5 con exactamente tres partes son:

$$(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2).$$

Teorema 6 (MacMahon [7]). Si denotamos por $\mathcal{C}(n)$ el total de composiciones de n y por $\mathcal{C}(n, m)$ el total de composiciones de n con exactamente m partes, entonces

- $\mathcal{C}(n, m) = \binom{n-1}{m-1}$.
- $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$.

Otra forma de restringir las composiciones es exigiendo que las partes estén en un conjunto dado. Particularmente, las composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ son aquellas cuyas partes permiten únicamente los sumandos 1 y 2. Por ejemplo, las composiciones de 5 con partes en $\{1, 2\}$ son:

$$(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1).$$

Teorema 7 (Alladi y Hoggatt [2]). Si denotamos por $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n)$ el total de composiciones de n con partes en $\{1, 2\}$, entonces $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}$, donde F_{n+1} es el número de Fibonacci $n + 1$.

De manera similar, se demuestra que si $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n)$ es el total de composiciones de n con partes en $\{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n) = T_{n+2}$, donde T_{n+2} es el número Tribonacci $n + 2$. Y en forma general, si $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n)$ es el total de composiciones de n con partes en $\{1, 2, \dots, k\}$, entonces $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n) = \mathcal{F}_{n+(k-1)}^{(k)}$, donde $\mathcal{F}_{n+(k-1)}^{(k)}$ es el número k -bonacci $n + (k - 1)$, donde los números k -bonacci (o k -generalizado de Fibonacci) son definidos recursivamente como

$$\mathcal{F}_n^{(k)} = \mathcal{F}_{n-1}^{(k)} + \mathcal{F}_{n-2}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{n-k}^{(k)}, \quad n \geq k,$$

con valores iniciales $\mathcal{F}_0^{(k)} = \mathcal{F}_1^{(k)} = \dots = \mathcal{F}_{k-2}^{(k)} = 0$ y $\mathcal{F}_{k-1}^{(k)} = 1$.

Otro tipo de restricción a las composiciones se obtienen al exigir sobre la ubicación de las partes en la composición. Como casos particulares se tienen las composiciones palíndromas (ver [6]) y composiciones de Carlitz (ver [3]).

Una composición *palíndroma* (o *auto-inversa*) es una composición que se lee de la misma forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, las composiciones palíndromas de 5 son:

$$(5), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1).$$

Teorema 8. Si denotamos por $\mathcal{P}(n)$ el total de composiciones palíndromas del entero positivo n , entonces

$$\mathcal{P}(n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

El total de composiciones palíndromas de n con exactamente m partes depende de la paridad del número de partes. Note que no hay composiciones palíndromas de un número impar con un número par de partes.

Teorema 9. Si denotamos por $\mathcal{P}(n, m)$ el total de composiciones palíndromas del entero n con exactamente m partes, entonces

- $\mathcal{P}(2n, 2k) = \binom{n-1}{k-1}$.
- $\mathcal{P}(2n, 2k + 1) = \mathcal{P}(2n - 1, 2k + 1) = \binom{n-1}{k}$.

El total de composiciones palíndromas con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ conduce a otra conexión con los números de Fibonacci.

Teorema 10. Si denotamos por $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$ el número total de composiciones palíndromas con partes en el conjunto $\{1, 2\}$, entonces

- $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n + 1) = F_{n+1}$

III Encuentro Matemático del Caribe

- $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n) = F_{n+2}$

donde F_{n+1} y F_{n+2} son los números de Fibonacci $n + 1$ y $n + 2$ respectivamente.

Una composición de Carlitz es una composición en la que sus partes adyacentes son diferentes. Por ejemplo, las composiciones de Carlitz de 5 son:

$$(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (1, 3, 1), (2, 1, 2).$$

Teorema 11. Si denotamos por $CC(n)$ el número total de composiciones de Carlitz del entero n , entonces para todo entero $n \geq 1$

$$CC(n) = \sum_{l=1}^n d'(l)CC(n-l)$$

donde $d'(n)$ denota la diferencia entre el número de divisores impares y el número de divisores pares de n .

La combinación de las composiciones palíndromas con las composiciones de Carlitz conduce a las composiciones palíndromas de Carlitz. Por ejemplo, las composiciones palíndromas de Carlitz de 5 son:

$$(5), (1, 3, 1), (2, 1, 2).$$

Note que no hay composiciones palíndromas de Carlitz con un número par de partes, debido a que las dos partes intermedias tendrían que ser iguales.

Teorema 12. Si denotamos por $CP(n)$ el número total de composiciones palíndromas de Carlitz, entonces la función generatriz para el número de composiciones palíndromas de Carlitz es

$$CP(x) = \sum_{n \geq 0} CP(n)x^n = 1 + \frac{\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{1+x^{2k}}}{1 - \sum_{k \geq 1} \frac{x^{2k}}{1+x^{2k}}}.$$

Los primeros valores de la sucesión $CP(n)$ son:

$$(OEIS - A239327)^1 : 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 14, 14, 25, 26, 42, 48, 75, 79, 132, \dots$$

Agarwal en [1] hace una generalización de las composiciones al permitir que las partes se puedan colorear en varios colores. Una *composición coloreada* es una composición en la que cada parte de tamaño i puede venir coloreada en i diferentes colores. Los colores de la parte i se denotarán por subíndices i_1, i_2, \dots, i_i para cada $i \geq 1$. Por ejemplo, las composiciones coloreadas de 5 son:

$$\begin{aligned} & (5_1), (5_2), (5_3), (5_4), (5_5), (4_1, 1_1), (4_2, 1_1), (4_3, 1_1), (4_4, 1_1), (1_1, 4_1), (1_1, 4_2), (1_1, 4_3), (1_1, 4_4), \\ & (3_1, 2_1), (3_2, 2_1), (3_3, 2_1), (3_1, 2_2), (3_2, 2_2), (3_3, 2_2), (2_1, 3_1), (2_2, 3_1), (2_1, 3_2), (2_2, 3_2), (2_1, 3_3), \\ & (2_2, 3_3), (3_1, 1_1, 1_1), (3_2, 1_1, 1_1), (3_3, 1_1, 1_1), (1_1, 3_1, 1_1), (1_1, 3_2, 1_1), (1_1, 3_3, 1_1), (1_1, 1_1, 3_1), \\ & (1_1, 1_1, 3_2), (1_1, 1_1, 3_3), (2_1, 2_1, 1_1), (2_2, 2_1, 1_1), (2_1, 2_2, 1_1), (2_2, 2_2, 1_1), (2_1, 1_1, 2_1), (2_2, 1_1, 2_1), \\ & (2_1, 1_1, 2_2), (2_2, 1_1, 2_2), (1_1, 2_1, 2_1), (1_1, 2_2, 2_1), (1_1, 2_1, 2_2), (1_1, 2_2, 2_2), (2_1, 1_1, 1_1, 1_1), \\ & (2_2, 1_1, 1_1, 1_1), (1_1, 2_1, 1_1, 1_1), (1_1, 2_2, 1_1, 1_1), (1_1, 1_1, 2_1, 1_1), (1_1, 1_1, 2_2, 1_1), (1_1, 1_1, 1_1, 2_1), \\ & (1_1, 1_1, 1_1, 2_2), (1_1, 1_1, 1_1, 1_1, 1_1). \end{aligned}$$

Teorema 13. Si denotamos por $\bar{C}(n)$, $\bar{C}(n, m)$ y $\bar{C}_{Pal}(n)$ el total de composiciones coloreadas de n , el total de composiciones coloreadas de n con exactamente m partes y el total de composiciones coloreadas palíndromas de n respectivamente, entonces

- $\bar{C}(n) = F_{2n}$, donde F_{2n} es el número de Fibonacci $2n$.
- $\bar{C}(n, m) = \binom{n+m-1}{2m-1}$

¹Código en On-line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org>

- $\bar{C}_{Pal}(n) = \begin{cases} F_n + 2F_{n-1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3F_n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$
donde F_n y F_{n-1} son los números de Fibonacci n y $n - 1$ respectivamente.

Deutsch et. al. [4] introducen las composiciones superdiagonales exigiendo una nueva restricción sobre la ubicación de las partes de la composición.

Una *composición superdiagonal* del entero positivo n , es una composición $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ tal que $\sigma_l \geq l$ para todo $1 \leq l \leq k$. Por ejemplo, las composiciones superdiagonal de 5 son:

$$(5), (1, 4), (3, 2), (2, 3).$$

Teorema 14. Si denotamos por $d(n, m)$ el total de composiciones superdiagonal de n con m partes y por $d(n)$ el total de composiciones superdiagonal de n , entonces

- $d(n, m) = \binom{n - \binom{m}{2} - 1}{m - 1}$.
- $d(n) = \sum_{k \geq 1}^m \binom{n - \binom{k}{2} - 1}{k - 1}$, donde $m = \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}$.

Recientemente, en [9] se obtuvieron resultados sobre las composiciones palíndromas superdiagonal y las composiciones coloreadas superdiagonal.

Teorema 15 ([9]). Si denotamos por $s(n, m)$ el total de composiciones palíndromas superdiagonal de n con exactamente m partes, entonces

- $s(2n, 2k) = \binom{n - \binom{k+1}{2} - 2\binom{k}{2} - 1}{k - 1}$.
- $s(2n, 2k - 1) = s(2n - 1, 2k - 1) = \binom{\lfloor \frac{n-3k^2}{2} \rfloor + 2k - 1}{k - 1}$.

Teorema 16 ([9]). Si denotamos por $c(n)$ el total de composiciones coloreadas superdiagonal de n , entonces

$$c(n) = \sum_{m, l \geq 0} \binom{2m + l - 1}{l} T \left(m, n - \binom{m+1}{2} - l \right),$$

donde $T(m, k) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m+k+i} \binom{i}{m-k} \left[\begin{matrix} m+1 \\ m+1-i \end{matrix} \right]$ y donde $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ son los números de Stirling de primera clase.

En esta charla haremos una introducción a la teoría de composiciones, mostrando los códigos en sage-math para obtener los distintos tipos de composiciones, y resaltaremos los temas actuales de investigación en esta área. Para finalizar se mostrará como determinar si un automata finito puede encontrar las palabras que eviten ciertos tipos de patrones de subsecuencias (ver [8]).

Para ampliar la información sobre composiciones, recomendamos el libro de Heubach y Mansour [5] y las notas de José L. Ramirez [10], donde también encontrará los códigos en Wolfram Mathematica para obtener los distintos tipos de composiciones.

Referencias

- [1] Agarwal, A. K. “ n -Colour compositions.” *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* 31.11 (2000): 1421-1428.

III Encuentro Matemático del Caribe

- [2] Alladi, Krishnaswami, and V. E. Hoggatt. "Compositions with ones and twos." *Fibonacci Quarterly* 13.3 (1975): 233-239.
- [3] Carlitz, Leonard. "Restricted compositions." *Fibonacci Quart* 14.3 (1976): 254-264.
- [4] Deutsch, Emeric, Emanuele Munarini, and Simone Rinaldi. "Skew Dyck paths, area, and superdiagonal bargraphs." *Journal of statistical Planning and Inference* 140.6 (2010): 1550-1562.
- [5] Heubach, Silvia, and Toufik Mansour. *Combinatorics of compositions and words*. Chapman and Hall/CRC, 2009.
- [6] Hoggatt, V. E., and Marjorie Bicknell. "Palindromic compositions." *Fibonacci Quarterly* 13.4 (1975): 350-356.
- [7] MacMahon, Percy Alexander. "II. Memoir on the theory of the compositions of numbers." *Proceedings of the Royal Society of London* 52.315-320 (1893): 290-294.
- [8] Brändén, Petter, and Toufik Mansour. "Finite automata and pattern avoidance in words." *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 110.1 (2005): 127-145.
- [9] Mantilla, Jazmín, Wilson Olaya-León, and José L. Ramírez. "Palindromic and Colored Superdiagonal Compositions." *arXiv preprint arXiv:2101.07733* (2021).
- [10] J. L. Ramírez. "Introducción a la teoría de composiciones." *Memorias del Seminario Sabanero de Combinatoria* 2019. Disponible en <https://sites.google.com/site/ramirezrjl/>.

Topología

Reflexiones y productos tensores de grupos topológicos abelianos

Autor: Julio César Hernández Arzusa
Universidad de Cartagena
E-mail: jhernandez2@unicartagena.edu.co

Resumen: En esta charla demostramos la existencia de productos tensoriales en algunas clases de grupos topológicos abelianos. Además establecemos una relación entre los productos tensoriales y las reflexiones.

Palabras clave: Producto tensorial, reflexión

Introducción

Notaremos con \mathcal{A} , \mathcal{C} , \mathcal{P} , y \mathcal{Q} , la clase de los grupos topológicos abelianos, compacto, precompactos y localmente cuasi convexos, respectivamente.

Definición 17. Sean G y H grupos topológicos abelianos y \mathcal{K} una subclase de \mathcal{A} . Un \mathcal{K} -producto tensor de G y H es un par (T, \otimes) , donde $T \in \mathcal{A}$ y $\otimes: G \times H \rightarrow T$ es bihomomorfismo continuo tal que, para todo bihomomorfismo continuo $\varphi: G \times H \rightarrow L$, con $L \in \mathcal{K}$ existe un homomorfismo continuo $\psi: T \rightarrow L$, tal que $\psi \circ \otimes = \varphi$.

La Definición 17 es debido a [3] y es dada en cualquier categoría topológica. Nosotros la abordamos en la categoría de los grupos topológicos abelianos. Además probamos que si $\mathcal{K} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$, entonces existe un único producto tensor $(G \otimes_{\mathcal{K}} H, \otimes_{\mathcal{K}})$, tal que $G \otimes_{\mathcal{K}} H \in \mathcal{K}$. Para esto usamos la definición general de grupo libre dada en [1].

Finalmente probamos que si \mathcal{K} es una subcategoría reflexiva de \mathcal{A} , entonces la reflexión de $G \otimes_{\mathcal{A}} H$ es \mathcal{K} -producto tensor de G y H . Como un caso particular veremos que el producto tensor definido en [2] es un \mathcal{Q} -producto tensor.

Referencias

- [1] Arhangel'skii, Alexander, and Mikhail Tkachenko. *Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] Garling, D. J. H. "Tensor products of topological Abelian groups." (1966): 164-182.
- [3] Hofmann, Karl Heinrich. "Tensorprodukte lokal kompakter abelscher Gruppen." (1964): 134-149.

An extension of the Carathéodory differentiability to set-valued maps

Authors: John Beiro Moreno Barrios, Pedro Hurtado, Alex Leones, Mitchael Martelo
 Facultad de Ingenierías, Corporación Universitaria Remington, Medellín, Colombia
 E-mail: john.moreno@uniremington.edu.co

Abstract: This paper uses the generalization of the Hukuhara difference for compact convex set to extend the classical notions of Carathéodory differentiability to multifunctions (set-valued maps). Using the Hukuhara difference and affine multifunctions as a local approximation, we introduce the notion of CH-differentiability for multifunctions. Finally, we tackle the study of the relation among the Fréchet differentiability, Hukuhara differentiability and CH-differentiability.

Keywords: Multifunctions, Hukuhara difference, Carathéodory differentiability, Fréchet differentiability.

Introduction

Given X and Y nonempty sets, if for each element x belonging to X is assigned, due to a certain law denoted here by $F : X \rightrightarrows Y$, a set $F(x)$ contained in Y , we say that F is a multifunction (we also use the term multivalued function or set-valued map). Among the many and various examples and uses of multifunctions we can find from those simpler provided by elementary algebra and trigonometry to those appearing, for example, in applications of control theory involving optimal control problems and structural properties of control systems such as stability, controllability/reachability ([1],[2],[3],[4]) and perturbation theory for ordinary differential equations in the real Euclidean space \mathbb{R}^n ([5],[6]); of particular interest is also studying the differentiability of multifunctions applied to perturbed optimization problems as observed in [7], where it is considered the problem “minimize $f(w, x)$ as $x \in A(w)$ ” being $f : W \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ an arbitrary function, $A : W \rightrightarrows X$ a multifunction with $0 \in \text{dom}A$ and W, X Banach spaces. The concept of differentiability for multifunction have been discussed for many authors([8],[9],[12],[13],[14],[15]). In [13] it is extend the classical notion of Fréchet differentiability to multifunctions, using affine multifunctions and Hausdorff distance.

Other concepts of differentiability can be found in the literature of classical analysis, as the Carathéodory derivative proposed in [16], the strength of Carathéodory’s formulation relies on the concept of continuity and its proof uses strongly the properties of continuous functions. Another advantage about this formulation is that, it does not require the difference quotient, present in the Fréchet formulation, which is the key to generalize it to a function of several variables. In [17] is explored some of the advantages of Carathéodory’s characterization over Fréchet’s characterization proposed in [18].

In this work, motivated by the Carathéodory derivative proposed in [16] and generalization of Hukuhara difference proposed ([9],[10],[11]), an extension of the classical notion of Carathéodory differentiability to multifunctions defined on finite-dimensional normed spaces is approached. For this purpose, we assume finite-dimensional normed vector spaces X and Y and consider the family of affine multifunctions (see [13] for details of affine multifunctions and the Fréchet differentiability of multifunctions):

$$MAFF_0(X, Y) = \{A : X \rightarrow bccY \mid A \text{ is affine and } A(0) = \{0\}\}, \quad (3)$$

where $bccY$ is the collection of all bounded closed convex subsets of Y , provided with a suitable metric. Then, we associate the differentiability (Carathéodory) of the multifunctions to the existence of continuous

functions

$$\phi_1, \phi_2 : X \rightarrow MAFF_0(X, Y).$$

This work we present some definitions and basic results of generalized Hukuhara difference and affine multifunction. Later presents our extension of Carathéodory differentiability to multifunctions, named here as CH-differentiability (Carathéodory Hukuhara differentiability), which is based on the set in (3) and the generalized Hukuhara difference, [9]. Also, we show an example of CH-differentiable multifunctions and study some properties of the CH-differentiability such as uniqueness, continuity, sum and composition. Finally, we provided a relation involving the Fréchet differentiability, generalized Hukuhara differentiability and CH-differentiability.

References

- [1] Anichini, Giuseppe. "Boundary value problem for multivalued differential equations and controllability." *Journal of mathematical analysis and applications* 105.2 (1985): 372-382.
- [2] Conti, G., P. Nistri, and P. Zecca. "Controllability problems via set-valued maps." *Recent advances in mathematical theory of systems, control, networks and signal processing, II* (Kobe, 1991) (1991): 253-258.
- [3] Ren, Jiagang, and Jing Wu. "The optimal control problem associated with multi-valued stochastic differential equations with jumps." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 86 (2013): 30-51.
- [4] Narvaez, Alfredo RR, and Eduardo F. Costa. "Average reachability of continuous-time markov jump linear systems and the linear minimum mean square estimator." *SIAM Journal on Control and Optimization* 54.4 (2016): 2063-2089.
- [5] Lasota, A., and Aaron Strauss. "Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized." *Journal of Differential Equations* 10.1 (1971): 152-172.
- [6] De Blasi, F. S. "On the differentiability of multifunctions." *Pacific Journal of Mathematics* 66.1 (1976): 67-81.
- [7] Penot, Jean-Paul. "Differentiability of relations and differential stability of perturbed optimization problems." *SIAM Journal on Control and Optimization* 22.4 (1984): 529-551.
- [8] Michta, Mariusz, and Jerzy Motyl. "Differentiable selections of multifunctions and their applications." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 66.2 (2007): 536-545.
- [9] Stefanini, Luciano, and Barnabás Bede. "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.3-4 (2009): 1311-1328.
- [10] Stefanini, Luciano. "A generalization of Hukuhara difference." *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. 203-210.
- [11] Stefanini, Luciano. "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic." *Fuzzy sets and systems* 161.11 (2010): 1564-1584.
- [12] Banks, H. T., and Marc Q. Jacobs. "A differential calculus for multifunctions." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 29.2 (1970): 246-272.
- [13] Gorokhovich, Valentin V., and Peter P. Zabreiko. "On Fréchet differentiability of multifunctions." *Optimization* 54.4-5 (2005): 391-409.
- [14] Bede, Barnabás, and Sorin G. Gal. "Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations." *Fuzzy sets and systems* 151.3 (2005): 581-599.
- [15] Amrahov, Şahin Emrah, et al. "Relationship between Bede–Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions." *Fuzzy Sets and Systems* 295 (2016): 57-71.

- [16] Kuhn, Stephen. "The derivative à la Carathéodory." *The American Mathematical Monthly* 98.1 (1991): 40-44.
- [17] Acosta G, Ernesto, and Cesar Delgado G. "Fréchet vs. Carathéodory." *The American Mathematical Monthly* 101.4 (1994): 332-338.
- [18] Fréchet, Maurice. "La notion de différentielle dans l'analyse générale." *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Vol. 42. 1925.
- [19] Brezis, Haim, and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. No. 3. New York: springer, 2011.

Álgebra

Hereditary species as monoidal decomposition spaces

Author: Wilson Forero
 Universidad Autónoma de Barcelona
 E-mail: wforero@mat.uab.cat

Abstract: We study the incidence coalgebra of a hereditary species as a special case of the general incidence bialgebra construction for monoidal decomposition spaces.

Keywords: Hereditary species, decomposition space, bialgebra.

Introduction

Incidence algebras and Möbius inversion form a cornerstone of combinatorics. Many of these algebras do not arise from posets, monoids or categories. Gálvez-Carrillo, Kock and Tonks [2] discovered that the incidence coalgebra construction and Möbius inversion make sense for objects more general than Möbius categories. These are completely new objects in this context which they call *decomposition spaces*. They are certain simplicial objects subject to an axiom that expresses decomposition, in the same way as the Segal condition (which characterises categories among simplicial sets) expresses composition.

In combinatorics, an important class of coalgebras are the incidence coalgebra of an operad, which also are covered by the decomposition space framework. Just as there are many coalgebras that do not come from categories, there are important examples of multi-linear coalgebras that do not come from operads. An important class of such coalgebras is given by Schmitt's hereditary species [4]. These are functors $H : \mathbb{S}_p \rightarrow \mathbf{Set}$, where \mathbb{S}_p denotes the category of finites sets and partially defined surjections. Carlier [1] showed that every hereditary species constitutes an example of a monoidal decomposition space, and that Schmitt's hereditary species bialgebra construction is a special case of the general incidence bialgebra construction for monoidal decomposition spaces.

I will outline an extension of this theory to the directed case, replacing finite sets by finite posets as the base case. This allows a common framework for hereditary species and directed restriction species [3].

References

- [1] Carlier, Louis. "Hereditary Species as Monoidal Decomposition Spaces, Comodule Bialgebras, and Operadic Categories." *International Mathematics Research Notices* (2020).
- [2] Gálvez-Carrillo, Imma, Joachim Kock, and Andrew Tonks. "Decomposition spaces, incidence algebras and Möbius inversion I: basic theory." *Advances in Mathematics* 331 (2018): 952-1015.
- [3] Gálvez-Carrillo, Imma, Joachim Kock, and Andrew Tonks. "Decomposition spaces and restriction species." *International Mathematics Research Notices* 2020.21 (2020): 7558-7616.
- [4] Schmitt, William R. "Hopf algebras of combinatorial structures." *Canadian Journal of Mathematics* 45.2 (1993): 412-428.

Sobre álgebras de Malcev que contienen la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(F)$

Autor: Victor Hugo López Solís
Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo
E-mail: vlopezs@unasam.edu.pe

Resumen: En este artículo describimos a las álgebras de Malcev que contienen a la álgebra de Lie simple central $\mathfrak{sl}_2(F)$ de dimensión 3. Esto resuelve el análogo del problema de Nathan Jacobson para las álgebras de Malcev.

Palabras claves: Álgebras de Malcev, Módulos de Malcev no de Lie, Teoremas de Coordinatización.

Introducción

En un famoso artículo [1], Nathan Jacobson propuso el problema de determinar las álgebras alternativas que contienen a la álgebra de los cuatérniones y este problema ha sido resuelto recientemente por el autor y Shestakov [3].

En [4], el autor describió la estructura de las álgebras y superálgebras alternativas que contienen ciertas (super)álgebras alternativas simples centrales de dimensión finita y demostró Teoremas de Coordinatización para dichas álgebras y superálgebras. En particular, en dicho trabajo fue resuelto el problema de Nathan Jacobson para las superálgebras alternativas que contienen la superálgebra asociativa $M_{(1|1)}(F)$, con la misma identidad.

Además, el autor en [2] describió las álgebras de Malcev que contienen a la álgebra de Malcev simple central no de Lie de dimensión 7 y demostró un Teorema de Coordinatización para dichas álgebras. Además, esos resultados fueron usados para obtener ciertas equivalencias de categorías.

En este trabajo describimos a las álgebras de Malcev que contienen a la álgebra de Lie simple central $\mathfrak{sl}_2(F)$ de dimensión 3 y esto resuelve el problema de Nathan Jacobson para las álgebras de Malcev.

Referencias

- [1] Jacobson, N. "A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra." *American Journal of Mathematics* 76.2 (1954): 447-452.
- [2] Solís, Victor Hugo López. "Kronecker factorization theorems for the seven dimensional simple non-Lie Malcev algebra." *arXiv preprint arXiv:2103.04334* (2021).
- [3] Solís, Victor H. López, and Ivan P. Shestakov. "On a problem by Nathan Jacobson." *arXiv preprint arXiv:2007.09313* (2020).
- [4] Solís, Victor Hugo López. "Kronecker factorization theorems for alternative superalgebras." *Journal of Algebra* 528 (2019): 311-338.

Recta proyectiva sobre anillos

Autor: Jackson Guevara Gómez
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: jacksonguevaramat@gmail.com

Resumen: Un problema central en geometría proyectiva es el estudio de la recta proyectiva sobre anillos, en particular anillos conmutativos con unidad, en nuestro caso el interés radica en los anillos totales de fracciones. En esta materia, se encuentran avances en el estudio de las K -álgebras finitas cuando $K = \mathbb{R}$, en particular el estudio de las rectas proyectivas sobre las \mathbb{R} -álgebras de dimensión 2, es decir, sobre \mathbb{C} , \mathbb{P} y \mathbb{D} , las cuales generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski. Sin embargo, es posible demostrar que toda \mathbb{R} -álgebra es un anillo total de fracciones.

Por lo tanto, el objetivo de esta charla es presentar los principales avances del estudio de la geometría de la recta proyectiva sobre anillos totales de fracciones. Partiremos definiendo el concepto de proyectividad algebraica, proyectividad de Staudt, razón doble, para finalmente demostrar que toda proyectividad algebraica es una proyectividad de Staudt, y viceversa.

Palabras clave: Anillos totales de fracciones, recta proyectiva, K -álgebras finitas, razón doble, complementable.

Introducción

El anillo de fracciones se define por primera vez en 1927, por Heinrich Grell, considerando a S como el conjunto de los no divisores de cero de un anillo R , lo que actualmente conocemos como Anillo Total de Fracciones.

Esta definición no cambió hasta 1944, cuando Claude Chevalley extiende la noción dada por Grell de anillo de cocientes, considerando a S como el complemento de un ideal primo \mathfrak{p} , ($S = R \setminus \mathfrak{p}$), lo que hoy se le conoce como la localización del anillo R por \mathfrak{p} .

Finalmente, Uzkov en 1948 extiende la definición de sus predecesores, la cual sigue vigente, considerando a S como un subconjunto multiplicativo. Cabe mencionar, que los conjuntos considerados por Grell y Chevalley, son casos particulares de estos subconjuntos.

La construcción de anillos de fracciones es una técnica muy relevante en álgebra conmutativa, pues éstos generalizan la construcción de los números racionales a partir de los números enteros. Basta considerar a S como el conjunto de números enteros distintos de cero, es decir, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es un conjunto multiplicativo ($1 \in S$ y $st \in S, \forall s, t \in S$) de \mathbb{Z} y, una relación de equivalencia \sim sobre $\mathbb{Z} \times S$. Entonces, el cuerpo \mathbb{Q} consiste de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in S$.

En general, para cualquier R anillo conmutativo con uno, consideramos $S \subseteq R$ multiplicativo, y definimos \sim la relación de equivalencia definida sobre $R \times S$,

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{existe } u \in S \text{ tal que } u(at - bs) = 0,$$

con $a, b \in R$ y $s, t \in S$. Considere $\frac{R \times S}{\sim}$ dotado de las siguientes operaciones

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \quad \text{y} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

III Encuentro Matemático del Caribe

Las cuales le dan a $\frac{R \times S}{\sim}$ estructura de anillo, denominado anillo de fracciones. Cabe resaltar, que a estos anillos también se les conoce como anillos de fracciones.

Un caso especial de los anillos de fracciones es el anillo total de fracciones, que considera al anillo conmutativo con uno R y S el conjunto multiplicativo de los no divisores de cero de R , esto resulta ser equivalente a que el anillo R está compuesto de elementos invertibles o divisores de cero.

Esta charla se divide en dos partes, la primera parte se realiza un estudio de los anillos de fracciones y se exponen propiedades del homomorfismo canónico. Además, se estudian las propiedades de los anillos totales de fracciones y se establecen relaciones existentes con otros anillos conmutativos con uno, como los dominios euclídeos, las \mathbb{K} -álgebras finitas, el producto de anillos totales de cocientes, y finalmente se muestra la inmersión de cualquier anillo R en un producto de cuerpos. Se entenderá por un anillo R , como un anillo conmutativo con uno.

Así mismo, hablaremos sobre la geometría proyectiva. Esta geometría no verifica el quinto postulado de Euclides de manera local, pero permite trabajar con el infinito y contiene a una geometría no local como es la euclídea. Como lo cita el profesor Aroca [2]; la geometría proyectiva parte de unas figuras elementales: puntos, rectas, planos, etc., a las que llamamos subespacios y una relación entre ellas, la relación de incidencia, que es el nombre geométrico que designa indistintamente a las expresiones conjuntistas contenido y contiene.

Un problema central en geometría proyectiva es el estudio de la recta proyectiva sobre anillos, en particular anillos conmutativos con uno, en este trabajo, se exponen los avances más significativos de la recta proyectiva sobre los anillos totales de fracciones.

Se puede evidenciar avances en el estudio de las \mathbb{K} -álgebras finitas cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en particular el estudio de las rectas proyectivas sobre las \mathbb{R} -álgebras de dimensión 2, conocidas como el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$, el anillo de los paracomplejos $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2-1 \rangle}$ y el anillo de los números duales $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 \rangle}$, las cuales generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski, realmente es poco lo que se conoce sobre las rectas proyectivas sobre otras \mathbb{R} -álgebras finitas.

Referencias

- [1] Atiyah, M., *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, Taylor and Francis Group, (1969).
- [2] Aroca, J. M., and MJ Fernández Bermejo. "Geometría Proyectiva." *Publicaciones Universidad de Valladolid*, (2009).
- [3] Granados Pinzón, Claudia Inés. "Álgebras finitas sobre un cuerpo: la recta proyectiva." *Tesis doctoral, Dep. análisis mat., álgebra, geometría y topología, Universidad de Valladolid, Valladolid*, (2015).
- [4] Franco, Santiago Mazuelas. "Interpretación proyectiva de las geometrías métricas, equiformes e inversivas." *Tesis doctoral, Universidad de Valladolid*, (2008).

La conjetura de Hermite en dimensión Krull menor o igual a uno

Autoras: Astrid Liliana Contreras Mendoza, Claudia Inés Granados Pinzón
 Universidad Industrial de Santander
 E-mails: astrid2198566@correo.uis.edu.co, cigranad@uis.edu.co

Resumen: En este trabajo se presenta un estudio preliminar sobre los anillos de Hermite, se probarán resultados que relacionan los anillos de Hermite con otros tipos de anillos conmutativos con unidad, como lo son: anillos locales, el producto de cuerpos y las \mathbb{K} -álgebras finitas, enseguida se presentará un ejemplo de un anillo que no es de Hermite y se finalizará presentando los problemas abiertos sobre este tipo de anillos. Entre los cuales, destaca la Conjetura de Hermite: si \mathcal{R} es un anillo de Hermite, entonces $\mathcal{R}[x]$ es de Hermite, se comentarán los avances hasta el momento de esta conjetura.

Palabras clave: Anillos de Hermite, fila unimodular, \mathcal{R} -módulo libre, recta proyectiva, \mathbb{K} -álgebras finitas.

Introducción

En 1995, J.P. Serre se preguntaba si los módulos proyectivos finitamente generados eran libres sobre el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ de n variables, con \mathbb{K} cuerpo. Serre en ninguna parte de sus escritos publicados había especulado sobre el posible resultado de su problema. Sin embargo, casi desde el principio suponía una respuesta positiva, que con el tiempo se conoció en el mundo como "La Conjetura de Serre".

La Conjetura de Serre entró en la década de 1960 como uno de los principales problemas abiertos en álgebra y geometría algebraica afín. En 1976 Quillen [7] y Suslin [8] dieron de forma independiente una respuesta afirmativa y hoy en día es conocido como el **Teorema de Quillen- Suslin**.

Los trabajos de Quillen y Suslin sobre la conjetura de la fila unimodular de Serre, abre el campo a los llamados por Lam [4], anillos de Hermite. Si consideramos \mathcal{M} un \mathcal{R} -módulo libre y \mathcal{R} un anillo conmutativo con unidad. En el caso $\mathcal{M} \cong \mathcal{R}^n$, podemos definir el siguiente conjunto :

$$Um_n(\mathcal{R}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n \mid \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \mathcal{R}\}.$$

Los elementos de $Um_n(\mathcal{R})$ se denominan *filas unimodulares* y decimos que una fila unimodular $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ es *complementable* si y sólo si existe una matriz B de $n \times n$ invertible cuya primera fila es (x_1, \dots, x_n) .

Decimos que \mathcal{R} es un anillo de Hermite si todo módulo establemente libre sobre \mathcal{R} es libre o lo que es equivalente a que toda fila unimodular puede ser complementable a una matriz invertible. Ejemplos de anillos de Hermite son los anillos locales, el anillos polinomios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con \mathbb{K} cuerpo, las \mathbb{K} -álgebras finitas entre otros.

Uno de problemas abiertos sobre este tipo de anillos, entre los cuales destaca, es la Conjetura de Hermite: si \mathcal{R} es un anillo de Hermite, entonces $\mathcal{R}[x]$ es de Hermite. Uno de los objetivos de este trabajo es presentar detalles de la prueba de la conjetura de Hermite para anillos de dimensión Krull ≤ 1 dada en [6] que corresponde a una extensión del Teorema del rango estable para el anillo de polinomios $\mathcal{R}[x]$.

Existe un interés adicional, por investigar sobre los anillos de Hermite, se basa en un problema abierto en geometría proyectiva, el cual consiste en caracterizar la recta proyectiva sobre un anillo \mathcal{R} . El trabajo de Havlicek [3] sobre la recta proyectiva de la \mathbb{R} -álgebra tridimensional $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^3 \rangle}$ ha sido uno de los avances más recientes de este problema, la relación de las \mathbb{K} -álgebras finitas con los anillos de Hermite nos motiva a estudiar la recta proyectiva sobre este tipo de anillos.

Referencias

- [1] Granados Pinzón, Claudia Inés. "Álgebras finitas sobre un cuerpo: la recta proyectiva." *Tesis doctoral, Dep. análisis mat., álgebra, geometría y topología, Universidad de Valladolid, Valladolid*, (2015).
- [2] Granados Pinzón, C., and W. Olaya León. "Anillos totales de fracciones y anillos de Hermite." *Ciencia en Desarrollo* 11.2 (2020): 125-134.
- [3] Havlicek, Hans, and Klaus List. "A three-Dimensional Laguerre geometry and its visualization." *arXiv preprint arXiv:1304.0223* (2013).
- [4] Lam, Tsit-Yuen. *Serre's problem on projective modules*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Yengui, Ihsen. "Constructive Commutative Algebra Projective Modules Over Polynomial Rings and Dynamical Grobner Bases Introduction." (2015): 1-+.
- [6] Yengui, Ihsen. "The Hermite ring conjecture in dimension one." *Journal of Algebra* 320.1 (2008): 437-441.
- [7] Quillen, Daniel. "Projective modules over polynomial rings." *Inventiones mathematicae* 36.1 (1976): 167-171.
- [8] Suslin, Andrei. "Projective modules over polynomial rings are free." *Doklady Akademii nauk SSSR* 229 (1976): 1063-1066.

Espacios profinitos y acciones parciales

Autor: Andrés Yamith Villamizar Tarazona
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: anyavita@correo.uis.edu.co

Resumen: En este trabajo se presentan algunos resultados establecidos por Magid en [1], que relacionan los espacios profinitos y las acciones de grupo. En particular se estudian las condiciones suficientes para que el espacio de orbitas X/G asociado a una acción de grupo sea profinito, y para que la proyección canónica $\psi_G : X \rightarrow X/G$ admita una sección continua. Adicionalmente se utilizan las acciones parciales de grupo para establecer condiciones que permitan extender los resultados estudiados en [1] a un contexto más general.

Palabras clave: Espacio profinito, grupo profinito, sección continua, relación de órbita, acción parcial.

Introducción

Sea I un conjunto dirigido y \mathcal{C} una categoría. Una construcción clásica en el contexto de la teoría de categorías es el límite inverso asociado a un sistema inverso indizado por I . En particular un espacio profinito X se define como el límite inverso de un sistema inverso de espacios topológicos finitos y discretos, o de manera equivalente como se expresa en [1], X es un espacio compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. Además un grupo topológico G es un grupo profinito si G visto como espacio topológico es un espacio profinito.

Los grupos profinitos fueron presentados de forma sistemática por primera vez en la obra *Cohomologie Galoisienne* de Jean-Pierre Serre, cuya primera edición fue publicada en 1964 [4, p. 72]. Allí los grupos profinitos recibían el nombre de *grupos de tipo Galois* [4]. Un hecho importante en la historia y desarrollo de la teoría de grupos profinitos es el interés que evidencia Wolfgang Krull por extender el conocido Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, considerando extensiones de Galois no necesariamente de grado finito. Esta consideración llevó a Krull en la década de 1920 [3, p. 155] a construir la llamada *topología de Krull* que además de permitir extender el clásico Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, dota de manera natural a los grupos de Galois con la estructura de grupo profinito. Por esta razón la teoría de Galois ofrece un ambiente natural para el desarrollo de los grupos profinitos. Algunos ejemplos importantes de grupos y espacios profinitos son el grupo de enteros p -ádicos \mathbb{Z}_p ; para un número primo p [4], los ya mencionados grupos de Galois asociados a una extensión de Galois arbitraria, el espacio de las componentes conexas $Comp(X)$ de un espacio topológico compacto Hausdorff X ; donde cada componente conexa es intersección de conjuntos abierto-cerrados [1, p. 52], el espectro booleano $X(R)$ asociado a un anillo conmutativo R [1, p. 73] y los grupos fundamentales considerados en geometría algebraica [2].

Sea G un grupo y $\varphi : G \times X \rightarrow X$ una acción de G sobre un espacio topológico X . La relación de equivalencia “ \sim_G ” sobre X , llamada *relación de órbita* es definida como: $x \sim_G y \Leftrightarrow \varphi(g, x) = y$, para algún $g \in G$. Las clases de equivalencia son llamadas órbitas y el espacio de órbitas es denotado por X/G . En este trabajo se tiene particular interés por estudiar la relación de los espacios y grupos profinitos con las acciones de grupo sobre espacios topológicos. Magid en [1] establece condiciones suficientes para que el espacio de orbitas adquiriera estructura de espacio profinito. Mas aún, en [1] Magid muestra particular interés por encontrar secciones continuas asociadas a la proyección canónica $\psi_G : X \rightarrow X/G$. Además de lo anterior, este trabajo también está enfocado en extender las ideas de Andy Magid estudiadas previamente y expuestas en [1], al contexto de *acciones parciales* de grupo, el cual generaliza de cierto modo los resultados establecidos por Andy Magid.

Referencias

- [1] Magid, Andy R. *The separable Galois theory of commutative rings*. CRC Press, 2014.
- [2] Martínez, Luis, Andrés Villamizar, and Héctor Pinedo. "Partial actions of groups on profinite spaces." *arXiv preprint arXiv:2101.04779* (2021).
- [3] Morandi, Patrick. *Field and Galois theory*. Vol. 167. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Ribes, Luis, and Pavel Zalesskii. "Profinite groups." *Profinite Groups*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. 19-77.

Sobre anillos epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados

Autor: Luis Augusto Martínez Sánchez
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: luchomartinez9816@hotmail.com

Resumen: En este trabajo estudiamos las clases de anillos epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados por un grupo G . En particular, presentamos una versión del Teorema de Dade para la familia de anillos casi-epsilon fuertemente graduados. Una aproximación funtorial es usada para obtener una caracterización de los anillos epsilon-fuertemente graduados. Además, introducimos la categoría $SIMS - gr$ de módulos simétricamente graduados y la usamos para mostrar una caracterización de los anillos fuertemente graduados. Finalmente, determinamos condiciones suficientes para que un anillo epsilon-fuertemente graduado pueda ser escrito como suma directa de anillos fuertemente graduados y un anillo trivialmente graduado.

Palabras clave: Anillo epsilon-fuertemente graduado, anillo casi epsilon-fuertemente graduado, álgebra de camino de Leavitt.

Introducción

La teoría de anillos y módulos graduados por estructuras algebraicas ha sido motivo de múltiples estudios por parte de la comunidad matemática. Aunque tales graduaciones pueden presentarse en contextos más generales, este trabajo se desarrolla en el marco de las graduaciones por grupos. Surgiendo así, una extensión de la teoría de anillos y módulos clásica.

Algunas estructuras matemáticas como los productos cruzados, pertenecen a una clase especial de anillos graduados por un grupo G , los anillos fuertemente graduados. El matemático Everett Dade, en su trabajo fundamental [1], estableció algunas propiedades de tales anillos, presentando en particular, una caracterización de los mismos mediante la relación entre ciertas categorías. En esta misma dirección, los estudios realizados en [7] exhiben relaciones entre anillos unitarios fuertemente graduados y conceptos categóricos.

Recientemente, una clase más general que la conformada por los anillos fuertemente graduados por un grupo G , ha motivado el desarrollo de varios trabajos como [4, 5] y [8]. Se trata de la familia de anillos epsilon-fuertemente graduados, introducida en [9]. La cual contiene, entre otros, importantes objetos matemáticos como los productos cruzados parciales y las álgebras de camino de Leavitt asociadas a grafos dirigidos finitos ([8]).

Los anillos epsilon-fuertemente graduados tendrán lugar en este trabajo, pues uno de los objetivos es escribirlos como suma directa de anillos fuertemente graduados por ciertos grupos, y un anillo con la graduación trivial. En este sentido, los resultados presentados en [2] y [3] tendrán un papel muy importante.

Por otro lado, en [5] se introducen algunas clases más generales que la de los anillos epsilon-fuertemente graduados, entre ellas, la de los anillos casi epsilon-fuertemente graduados. Las álgebras de camino de Leavitt asociadas a grafos dirigidos arbitrarios son ejemplos de tales anillos ([8]). Los anillos casi epsilon-fuertemente graduados también serán motivo de estudio, debido a que se busca presentar una versión del Teorema de Dade para esta clase de anillos.

Los resultados más importantes que hemos obtenido en nuestra investigación pueden ser encontrados en [6].

Referencias

- [1] Dade, Everett C. "Group-graded rings and modules." *Mathematische Zeitschrift* 174.3 (1980): 241-262.
- [2] Kuo, Jung-Miao, and George Szeto. "The structure of a partial Galois extension." *Monatshefte für Mathematik* 175.4 (2014): 565-576.
- [3] Kuo, Jung-Miao, and George Szeto. "The structure of a partial Galois extension II." *Journal of Algebra and Its Applications* 15.04 (2016): 1650061.
- [4] Lännström, Daniel. "Chain conditions for epsilon-strongly graded rings with applications to Leavitt path algebras." *Algebras and Representation Theory* (2019): 1-20.
- [5] Lännström, Daniel. "Induced quotient group gradings of epsilon-strongly graded rings." *Journal of Algebra and Its Applications* 19.09 (2020): 2050162.
- [6] Martínez, Luis, Héctor Pinedo, and Yerly Soler. "On the structure of nearly epsilon and epsilon-strongly graded rings." *arXiv preprint arXiv:2010.03054* (2020).
- [7] Nastasescu, Constantin, and Freddy Van Oystaeyen. *Methods of graded rings*. Springer, 2004.
- [8] Nystedt, Patrik, and Johan Öinert. "Group gradations on Leavitt path algebras." *Journal of Algebra and its Applications* 19.09 (2020): 2050165.
- [9] Nystedt, Patrik, Johan Öinert, and Héctor Pinedo. "Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity." *Journal of Algebra* 514 (2018): 1-24.

La Categoría de las p -Álgebras de Lie

Autor: Carlos Rafael Payares Guevara
 Universidad Tecnológica de Bolívar
 E-mail: cpayares@utb.edu.co

Resumen: En esta charla presentaremos la categoría de las p -álgebras de Lie simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 0$. Daremos algunos ejemplos clásicos. Después de esa parte introductoria, abordaremos el problema de clasificación de las p -álgebras de Lie simple.

Palabras clave: Álgebras de Lie simple, p -álgebras de Lie.

Introducción

La noción de álgebra de Lie restringida (también llamada p -álgebra de Lie) fue introducida por N. Jacobson en 1937 (ver [2]). Recordemos que una álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre un cuerpo \mathbb{F} de característica $p > 0$ es una p -álgebra de Lie (ver [3], pag.187) si existe una aplicación $[p] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, a \mapsto a^{[p]}$ tal que:

- $(\lambda a)^{[p]} = \lambda^p a^{[p]}, \forall \lambda \in \mathbb{F}, a \in \mathfrak{g}.$
- $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(b^{[p]}) = (\text{ad}_{\mathfrak{g}}(b))^p, \forall b \in \mathfrak{g}.$
- $(a + b)^{[p]} = a^{[p]} + b^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a, b), \forall a, b \in \mathfrak{g},$
 donde $s_i(a, b)$ es el coeficiente de t_{i-1} en la expansión de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}^{p-1}(at + b)(a)$ sobre la indeterminada t

El problema de clasificación de las álgebras de Lie simple de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 0$, comenzó con la conjetura de Kostrikin-Shafarevich (ver [4]). Ellos conjeturaron que un álgebra de Lie simple restringida (es decir, una álgebra de Lie restringida sin ideales) sobre un campo algebraicamente cerrado de característica $p > 5$ es Clásica o de tipo Cartan. La conjetura de Kostrikin-Shafarevich fue probada por Block y Wilson (ver [5] y [6]) para $p > 7$. Recientemente, Premet y Strade (ver [7], [8], [9], [10]) demostraron la Conjetura de Kostrikin-Shafarevich para $p = 7$. Además, mostraron que para $p = 5$ sólo hay una excepción, el álgebra de Melikian de dimensión 125 (ver [11]).

Después de la clasificación de las p -álgebras de Lie simple, de dimensión finita, sobre cuerpos algebraicamente cerrado de característica $p > 3$; el principal problema todavía abierto en el universo de las álgebras de Lie de dimensión finita es la clasificación de las álgebras de Lie simple y de las p -álgebras de Lie simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p \in \{2, 3\}$. De esta manera, la ponencia pretende introducir todas las herramientas necesarias para entender el problema de clasificación de las 2-álgebras de Lie simple y ver hasta donde este estudio se ha desarrollado.

Referencias

- [1] Guevara, Carlos R. Payares, and Fabián A. Arias Amaya. "Classical simple Lie 2-algebras of odd toral rank and a contragredient Lie 2-algebra of toral rank 4." *Revista de la Unión Matemática Argentina* (2021): 123-139.
- [2] Jacobson, Nathan. "Abstract derivation and Lie algebras." *Transactions of the American Mathematical Society* 42.2 (1937): 206-224.
- [3] Jacobson, N. "Lie Algebras, Interscience Publ." *Inc., New York* (1962).

III Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Kostrikin, Aleksei Ivanovich, and Igor Rostislavovich Shafarevich. "Cartan's pseudogroups and the p-algebras of Lie." *Doklady Akademii Nauk*. Vol. 168. No. 4. Russian Academy of Sciences, 1966.
- [5] Block, Richard E., and Robert Lee Wilson. "The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 81.16 (1984): 5271-5274.
- [6] Block, Richard E., and Robert Lee Wilson. "Classification of the restricted simple Lie algebras." *Journal of Algebra* 114.1 (1988): 115-259.
- [7] Premet, Alexander, and Helmut Strade. "Simple Lie algebras of small characteristic: I. Sandwich elements." *Journal of Algebra* 189.2 (1997): 419-480.
- [8] Premet, Alexander, and Helmut Strade. "Simple Lie algebras of small characteristic II. Exceptional roots." *Journal of Algebra* 216.1 (1999): 190-301.
- [9] Premet, Alexander, and Helmut Strade. "Simple Lie algebras of small characteristic: III. The toral rank 2 case." *Journal of Algebra* 242.1 (2001): 236-337.
- [10] Premet, Alexander, and Helmut Strade. "Simple Lie algebras of small characteristic IV.: Solvable and classical roots." *Journal of Algebra* 278.2 (2004): 766-833.
- [11] Melikyan, G. M. "On simple Lie algebras of characteristic 5." *Russian Mathematical Surveys* 35.1 (1980): 219.

Geometría

Minimal spheres in ellipsoids of revolution

Author: Renato Ghini Bettiol
City University of New York (Lehman College)
E-mail: renato.ghinibettiol@lehman.cuny.edu

Abstract: Motivated by Morse-theoretic considerations, Yau asked in 1987 whether all minimal 2-spheres in a 3-dimensional ellipsoid inside \mathbb{R}^4 are planar, i.e., determined by the intersection with a hyperplane. Recently, this was shown not to be the case by Haslhofer and Ketover, who produced an embedded non-planar minimal 2-sphere in sufficiently elongated ellipsoids, combining Mean Curvature Flow and Min-Max methods. Using Bifurcation Theory and the symmetries that arise if at least two semi-axes coincide, we show the existence of arbitrarily many distinct embedded non-planar minimal 2-spheres in sufficiently elongated ellipsoids of revolution. This is based on joint work with P. Piccione.

How to do differential geometry on non-smooth quotients?

Author: Cristian Ortiz
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo
E-mail: cortiz@ime.usp.br

Abstract: I will explain recent development on the geometry of certain singular quotients of manifolds called differentiable stacks. We will focus on examples and techniques rather than on technical results.

A class of singular polyhedral surfaces

Author: Marcel Vinhas Bertolini
ICEN-UFPA - Brazil
E-mail: marcelvbertolini@gmail.com

Abstract: Surfaces of polyhedrons, when measured along paths contained in it, are among the easiest to describe examples in two-dimensional geometry. They belong to a broader family of length surfaces, called polyhedral, whose significance within contemporary mathematics was established by their appearance in fields as complex analysis, dynamical systems and, of course, geometry. Further developments on these matters led to the consideration of spaces that, from a geometric point of view, are complete length metrics which are polyhedral away from a singular set. In this talk, we look at the class of these spaces that are obtained by gluing isometrically infinitely-many subsegments of polygons' frontiers (this class contains, for instance, infinite translation surfaces, and the domains of generalized pseudo-Anosov surface automorphisms). We employ elementary techniques of metric geometry to describe the behaviour of geodesics approaching certain kinds of singularities, and to see spaces with singularities as Gromov-Hausdorff limits of spaces without singularities (polyhedral surfaces). This is done with the intention of throwing light on properties that can appear in this context, such as the curvature being unbounded despite the topology being finite, as well as to explore the possibility of a deformation theory in this setting.

The deformation cohomology of symplectic groupoids

Author: Cristian Camilo Cárdenas
Universidade Federal Fluminense
E-mail: ccardenascrist@gmail.com

Abstract: Symplectic groupoids are geometric objects which combine symplectic geometry and Lie groupoids. They have an important role for mathematical physics and can be viewed as desingularizations of Poisson manifolds. In this talk, I will first make an overview on Lie groupoids and give examples of how they offer models for several kind of geometric structures (manifolds, Lie groups, principal bundles, Lie group actions, among other). I will then give an idea of symplectic groupoids and the way that they can be viewed as a global counterpart of (integrable) Poisson manifolds. Then, I will present the cohomology which controls deformations of symplectic groupoids and show how to use it to prove a Moser-rigidity theorem for symplectic groupoids [1]. If time permits I will explain the relation of this cohomology with the Poisson cohomology of the corresponding Poisson manifold.

This talk is based on a joint work with Joao Mestre (Coimbra) and Ivan Struchiner (USP)

Keywords: Symplectic geometry, Lie groupoids, Deformation Theory.

References

- [1] Cárdenas, Cristian Camilo, João Nuno Mestre, and Ivan Struchiner. "Deformations of symplectic groupoids." *arXiv preprint arXiv:2103.14008* (2021).

Criterios de estabilidad en familias de hipersuperficies con CMC y frontera libre

Autor: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
 Universidad Industrial de Santander (UIS)
 E-mail: cwrodrig@uis.edu.co

Resumen: Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n + 1$, con frontera suave ∂M y Σ^n una variedad diferenciable de dimensión n , también con frontera suave $\partial\Sigma$. Sea $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ una inmersión con CMC (Curvatura Media Constante) y frontera libre. Probada la existencia de una deformación suave $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$ de φ tal que φ_t tiene CMC y frontera libre, mostaremos algunos criterios de estabilidad de φ a partir de las propiedades de los valores propios del operador de Jacobi J_φ asociado a φ .

Este trabajo hace parte de los resultados de investigación del proyecto “Bifurcación y estabilidad en familias de inmersiones con curvatura media constante y frontera libre”, (C-2020-02), financiado por la Universidad Industrial de Santander (UIS).

Palabras clave: Hipersuperficies con CMC, frontera libre, operador de Jacobi, condición de frontera libre linearizada, deformación, estabilidad.

Introducción

La Teoría de Optimización y Estabilidad en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología es un criterio muy importante que sirve como herramienta para el estudio de fenómenos como la conservación de energía, minimización de materiales, optimización de recursos, etc. El término estabilidad se refiere al hecho de que una superficies con CMC (Curvatura Media Constante) debe tener área mínima entre todas las superficies que encierran el mismo volumen. Una hipersuperficie con CMC es estable si la segunda variación del funcional área no es negativa.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n + 1$ con frontera suave ∂M y sea Σ^n una hipersuperficie de M compacta y con frontera suave $\partial\Sigma$. Sea $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ un encajamiento (embebimiento). Asumamos que $\varphi(\Sigma) \cap \partial M = \varphi(\partial\Sigma)$ y que $M \setminus \varphi(\Sigma) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, con $\bar{\Omega}_1$ compacto y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Decimos que $\varphi(\Sigma)$ es una *hipersuperficie con CMC y frontera libre* si tiene curvatura media constante y para todo $p \in \varphi(\partial\Sigma)$, $\vec{n}_{\partial M}(p) \in T_p\varphi(\Sigma)$, donde $\vec{n}_{\partial M}(p)$ es el campo vectorial normal exterior a lo largo de la frontera de M en p .

Como $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ es un encajamiento con CMC y frontera libre entonces φ es un punto crítico para el g -funcional de área \mathcal{A}_g definido en el conjunto $\text{Emb}_\partial(\Sigma, M)$ de todos los encajamientos $x : \Sigma \rightarrow M$ que satisfacen $x(\partial\Sigma) \subset \partial M$.

Probada la existencia de una deformación suave de φ formada por hipersuperficies con CMC y frontera libre (ver [3]), sea $\varphi_t : \Sigma \rightarrow M$ una variación tal de φ , $-\epsilon < t < \epsilon$, con $\varphi_0 = \varphi$. Por lo tanto, cada φ_t es una inmersión con CMC y frontera libre. Sean $A(t)$ y $V(t)$ el área y el volumen de φ_t respectivamente. Decimos que φ_t preserva el volumen si $V(t) = V(0)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Se tiene que φ_t tiene CMC, H_t , si y sólo si es un punto crítico del funcional:

$$f(t) = A(t) - H_t V(t) = \int_{\Sigma} \text{vol}_{\varphi_t^*(g)} - H_t \int_{\Omega_t} \text{vol}_g,$$

donde Ω_t es el volumen encerrado por φ_t . Sea $\xi_t = g(\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}, \vec{n}_{\Sigma_t})$. Entonces, se tiene que

$$A'(t) = \int_{\Sigma} H_t \xi_t \text{vol}_{\varphi_t^*(g)}.$$

Luego,

$$A''(0) = \int_{\Sigma} J_{\varphi_0}(\xi_0) \xi_0 \text{vol}_{\varphi_0^*(g)},$$

donde $J_{\varphi_0} : C^j(\Sigma_0) \rightarrow C^{j-2}(\Sigma_0)$ es el operador de Jacobi definido en $C^j(\Sigma_0)$, que es el conjunto de las funciones $f : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen derivadas continuas hasta el orden j , siendo $\Sigma_0 = \varphi_0(\Sigma)$. J_{φ_0} está definido por:

$$J_{\varphi}(f) := \Delta_{\Sigma_0} f - (\|\mathbb{I}^{\Sigma_0}\|_{HS}^2 + Ric_g(\eta_{\Sigma_0}, \eta_{\Sigma_0}))f.$$

Aquí Δ_{Σ_0} es el laplaciano (no-negativo) sobre Σ_0 y $\|\mathbb{I}^{\Sigma_0}\|_{HS}^2$ es el cuadrado de la norma de Hilbert-Schmidt de la segunda forma fundamental de φ_0 .

También se tiene que

$$V'(t) = \int_{\Sigma} \xi_t \text{vol}_{\varphi_t^*(g)}$$

Para nuestros propósitos es necesario que J_{φ_0} sea un operador Fredholm de índice cero. Para obtener esta condición se necesita establecer una regularidad de tipo Hölder $C^{j,\alpha}$ para nuestros encajamientos. Además, para que nuestros encajamientos cumplan la condición de ortogonalidad es necesario que cumplan con la *Condición de Frontera Libre Linearizada* que se puede expresar como:

$$g(\nabla f, \vec{\eta}_{\partial M}) + \mathbb{I}^{\partial M}(\vec{\eta}_{\Sigma_0}, \vec{\eta}_{\Sigma_0})f = 0,$$

donde ∇f es el g -gradiente de f , \vec{n}_{Σ} es el vector unitario normal a lo largo de Σ y $\mathbb{I}^{\partial M}$ es la segunda forma fundamental de ∂M en la dirección del vector normal $\vec{n}_{\partial M}$.

De esa forma, si restringimos el dominio de J_{φ_0} al espacio

$$C_{\partial}^{j,\alpha}(\Sigma_0) := \{f \in C^{j,\alpha}(\Sigma_0) : g(\nabla f, \eta_{\partial M}) + \mathbb{I}^{\partial M}(\vec{n}_{\Sigma_0}, \vec{n}_{\Sigma_0})f = 0\},$$

tenemos que $J_{\varphi_0} : C_{\partial}^{j,\alpha}(\Sigma) \rightarrow C^{j-2}(\Sigma)$ es un operador Fredholm de índice cero.

Definición 18. Una inmersión con CMC y frontera libre $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ se dice estable si y sólo si $A''(0)(f) \geq 0$, para todo $f \in C_{\partial}^{j,\alpha}(\Sigma)$ tal que $\int_{\Sigma} f \text{vol}_{\varphi_t^*(g)} = 0$. Cuando φ no es estable se dice que es inestable.

Así, con respecto a la estabilidad de φ obtuvimos los siguientes resultado, donde $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ son los valores propios de J_{φ_0} .

Teorema 19. Sea $\varphi_0 : \Sigma \rightarrow M$ una inmersión con CMC y frontera libre. Sean $\lambda_i, i \geq 1$ los valores propios de J_{φ_0} .

(1) Si $\lambda_1 \geq 0$, entonces φ_0 es estable.

(2) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces existe una única función $\kappa \in C^{j,\alpha}(\Sigma)$ tal que $J(\kappa) = 1$ y tenemos que:

(2-a) Si $\int_{\Sigma} \kappa \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} \leq 0$, entonces φ_0 es estable.

(2-b) Si $\int_{\Sigma} \kappa \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} > 0$, entonces φ_0 es inestable.

(3) Si $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$, entonces tenemos:

(3-a) Si existe una λ_2 -función propia f_2 tal que $\int_{\Sigma} f_2 \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} \neq 0$, entonces φ_0 es inestable.

(3-b) Si $\int_{\Sigma} h_2 \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} = 0$ para todo λ_2 -función propia h_2 , entonces existe una única función $\bar{h}_2 \in (\ker(J_{\varphi_0}))^{\perp}$ tal que $J(\bar{h}_2) = 1$ y

(3-b-i) Si $\int_{\Sigma} \bar{h}_2 \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} \leq 0$, entonces φ_0 es estable.

(3-b-ii) Si $\int_{\Sigma} \bar{h}_2 \text{vol}_{\varphi_0^*(g)} > 0$, entonces φ_0 es inestable

(4) Si $\lambda_2 < 0$, entonces φ_0 es inestable.

Esta es la versión para hipersuperficies con CMC y frontera libre en dimensión n basado en el trabajo de Miyuki Koiso (see [4]), quien estudió el caso para superficies en \mathbb{R}^3 con frontera fija.

Referencias

- [1] Ambrozio, Lucas C. "Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds." *The Journal of Geometric Analysis* 25.2 (2015): 1001-1017.
- [2] Lucas Barbosa, João, and M. Do Carmo. "Stability of hypersurfaces with constant mean curvature." *Mathematische Zeitschrift* 185.3 (1984): 339-353.
- [3] Bettiol, Renato G., Paolo Piccione, and Bianca Santoro. "Deformations of free boundary CMC hypersurfaces." *The Journal of Geometric Analysis* 27.4 (2017): 3254-3284.
- [4] Koiso, Miyuki. "Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature." *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 54.1 (2002): 145-159.
- [5] Koiso, Miyuki, Bennett Palmer, and Paolo Piccione. "Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature." *Journal of the Mathematical Society of Japan* 69.4 (2017): 1519-1554.
- [6] ARos, Antonio, and Enaldo Vergasta. "Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary." *Geometriae Dedicata* 56.1 (1995): 19-33.

Soluciones radiales a problemas de EDPS semilineales

Autores: Edward Samuel Becerra Rojas, J. Galvis, N. Martinez
Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Colombia
E-mail: esbecerrar@unal.edu.co

Resumen: En esta presentación explicamos como la geometría diferencial permite estudiar la existencia de soluciones de un problema de una EDP semilineal definida sobre una variedad Riemanniana M . Usando resultados clásicos debidos principalmente a Helgason en [J DIFFER GEOM,6(3), 411-419] logramos reducir la EDP a una EDO definida sobre una subvariedad con condiciones adecuadas lo cual nos permite buscar soluciones que son constantes sobre las orbitas de una acción de un grupo compacto de isometrias de M . Nuestro metodo aplica a una gran cantidad de ejemplos e interesantes situaciones particulares que pueden hallarse por separado en la literatura, pero que puede mostrarse, hacen parte de una misma teoría general. Gracias a nuestro método, el problema de hallar soluciones positivas de la EDP original se traduce en uno más manejable donde es posible probar la existencia de soluciones positivas y a su vez implicando existencia de soluciones del problema original.

Palabras clave: Semi-lineal PDEs, Acciones polares, Coordenadas polares generalizadas.

Obligando a la existencia de órbitas de Reeb en $S^1 \times S^2$ *tight*

Autor: Diego Alfonso Sandoval Salazar
Universidad Federal de Minas Gerais
E-mail: dasando1@gmail.com

Resumen: El objetivo principal de esta conferencia es mostrar la existencia implicada de órbitas periódicas de flujos de Reeb para las formas de contacto *tight* en $S^1 \times S^2$, como se hizo en [6]. Mas precisamente, probamos que la existencia de un número finito de ciertas órbitas periódicas obliga la existencia de un número infinito de otras órbitas periódicas.

Palabras clave: Variedades de contacto, curvas pseudo-holomorfas en la simplectización, homología de contacto cilíndrica y teoría de campos simplécticos.

Introducción

Una 1-forma λ definida en una variedad M de dimensión $2n + 1$ es una forma de contacto si $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ define una forma de volumen en M . La forma de contacto determina una distribución de espacios tangentes $\xi = \ker \lambda \subset TM$, la cual es llamada de estructura de contacto; también llamamos de campo de Reeb al campo de vectores R_λ definido por $\lambda(R_\lambda) = 1$ y $d\lambda(R_\lambda, \cdot) = 0$. El par $(M, \xi = \ker \lambda)$ es llamado de variedad de contacto co-orientada. El flujo dado por R_λ en M es llamado de flujo de Reeb asociado a λ .

Ahora, supongamos que M tiene dimensión 3. Decimos que la estructura de contacto $\xi = \ker \lambda$ es *overtwisted* si existe un disco $D \hookrightarrow M$ tal que $T_p D = \xi_p, \forall p \in \partial D$. De lo contrario, decimos que ξ es *tight*. Esta definición se debe a Y. Eliashberg. Además, en $S^1 \times S^2$ existe apenas una única estructura de contacto *tight* a menos de difeomorfismos. Ver [1, 2, 3, 4, 5].

El objetivo principal de esta conferencia es mostrar la existencia implicada de órbitas periódicas de flujos de Reeb para las formas de contacto *tight* en $S^1 \times S^2$, como se hizo en [6]. Mas precisamente, probamos que la existencia de un número finito de ciertas órbitas periódicas obliga la existencia de un número infinito de otras órbitas periódicas.

A continuación se presenta una familia de formas de contacto en $S^1 \times S^2$. Sea

$$[-1, 1] \in \eta \mapsto (f(\eta), g(\eta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

una curva suave tal que

- $f(-1) > 0, g(-1) = 0, f(1) < 0, g(1) = 0$.
- $g(\eta) > 0, \forall \eta \in (-1, 1)$.
- $(fg' - gf')(\eta) > 0, \forall \eta$.
- $(f'g'' - g'f'')(\eta) > 0, \forall \eta$.

En $S^1 \times S^2$ consideramos las coordenadas (t, θ, φ) , donde $t \in S^1$ y $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0, \pi)$ son las coordenadas esféricas usuales en $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. En estas coordenadas, la 1-forma

$$\lambda_{f,g} := f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta,$$

determina una forma de contacto en $S^1 \times S^2$. La estructura de contacto inducida, en este caso, es *tight*. Es posible verificar que $P_1 := S^1 \times (0, 0, 1)$ y $P_2 := S^1 \times (0, 0, -1)$ son órbitas periódicas del flujo de Reeb asociada a $\lambda_{f,g}$. Si $f_0(\eta) = -\eta$ e $g_0(\eta) = 1 - f_0^2(\eta)$, $\eta \in [-1, 1]$, la estructura de contacto ξ_0 es definida por $\ker \lambda_{f_0, g_0}$.

En [6] fue presentada una versión del teorema de Poincaré-Birkhoff para flujos de Reeb en S^3 *tight*. En este caso, un resultado similar puede ser enunciado a continuación para $S^1 \times S^2$ *tight*.

Teorema 20. *Sea λ una forma de contacto en $S^1 \times S^2$ que induce la estructura de contacto *tight* ξ_0 . Asumimos que el par de órbitas $L := P_1 \sqcup P_2 \subset S^1 \times S^2$ son órbitas de Reeb asociadas a λ . Entonces el flujo de Reeb asociado a λ admite un número infinito de órbitas periódicas en el complemento de L , cuyas clases de homotopía son prescritas de acuerdo con los números de rotación de las componentes de L .*

La demostración de este resultado hace uso de la homología de contacto cilíndrica en el complemento de L , la cual es un invariante construido a partir del flujo de Reeb en el complemento de un conjunto finito de órbitas periódicas. En el teorema anterior, la existencia de esas infinitas órbitas periódicas es obtenida a partir de mostrar que este invariante es no-trivial para infinitas clases de homotopía en el complemento de L .

Referencias

- [1] Eliashberg, Yakov. "Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds." *Inventiones mathematicae* 98.3 (1989): 623-637.
- [2] Eliashberg, Yakov. "Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work." *Annales de l'institut Fourier*. Vol. 42. No. 1-2. 1992.
- [3] Geiges, Hansjörg. *An introduction to contact topology*. Vol. 109. Cambridge University Press, 2008.
- [4] Honda, Ko. "On the classification of tight contact structures I." *Geometry and Topology* 4 (2000).
- [5] Honda, Ko. "On the classification of tight contact structures II." *Journal of Differential Geometry* 55.1 (2000): 83-143.
- [6] Hryniewicz, Umberto, Al Momin, and Pedro Salomão. "A Poincaré–Birkhoff theorem for tight Reeb flows on S^3 ." *Inventiones mathematicae* 199.2 (2015): 333-422.

Análisis

Some inequatlities of the Hermite-Hadamard type for two kinds of convex functions

Authors: Juan Gabriel Galeano Delgado, Juan E. Nápoles Valdés, Edgardo Pérez Reyes
 Universidad de Córdoba, UNNE, FaCENA-UTN-FRRE, Universidad del Sinú Elías Bechara Zainúm
 E-mails: jgabrielgaleano@correo.unicordoba.edu.co, jnapoles@exa.unne.edu.ar, jnapoles@frre.utn.edu.ar, edgardomath@gmail.com

Abstract: In this paper, we obtain new inequalities of the Hermite-Hadamard type, in two different classes of convex dominated functions. Several known results from the literature are obtained as particular cases of ours.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality; generalized fractional integral

Introduction

Perhaps one of the most productive mathematical ideas lately, due to its variety of uses and interrelationships with different applications, is that of the convex function.

Definition 21. A function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be *convex* on interval $I \subset \mathbb{R}$, if the inequality $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$, for $x, y \in I$ is fulfilled with $t \in [0, 1]$.

We say that f is concave if $-f$ is convex.

The consequent extensions of this concept, which have appeared lately, have transformed it into an extremely complex concept. To reflect on this, we suggest that the user read the work [19], where a fairly complete classification of most of the known definitions is made.

Definition 22. ([6]) Let the function $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convex on interval $I \subset \mathbb{R}$. The function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ it is said *g-convex dominated* on I if the inequality

$$|tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y)| \leq tg(x) + (1 - t)g(y) - g(tx + (1 - t)y),$$

hold for $x, y \in I$ and $t \in [0, 1]$.

The classes of convex functions used in our work are as follows.

Definition 23. ([10]) A function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to belong to the class of $Q(I)$ if it is nonnegative and for all $u, v \in I$ and $t \in (0, 1)$ satisfies the inequality

$$\varphi(tu + (1 - t)v) \leq \frac{\varphi(u)}{t} + \frac{\varphi(v)}{1 - t}$$

Definition 24. ([7]) A function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is *P function* or that φ belongs to the class of $P(I)$, if it is nonnegative and for all $u, v \in I$ and $t \in (0, 1)$ satisfies the inequality

$$\varphi(tu + (1 - t)v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$$

Definition 25. ([21]) Let a nonnegative function $\psi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to the class of $Q(I)$. The real function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called $(\psi, Q(I))$ -convex dominated on I if for all $u, v \in I$ and $t \in (0, 1)$ satisfies the inequality

$$\left| \frac{\varphi(u)}{t} + \frac{\varphi(v)}{1-t} - \varphi(tu + (1-t)v) \right| \leq \frac{\psi(u)}{t} + \frac{\psi(v)}{1-t} - \psi(tu + (1-t)v).$$

Definition 26. ([21]) Let a nonnegative function $\psi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to the class of $P(I)$. The real function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called $(\psi, P(I))$ -convex dominated on I if for all $u, v \in I$ and $t \in (0, 1)$ satisfies the inequality

$$|[\varphi(u) + \varphi(v)] - \varphi(tu + (1-t)v)| \leq [\psi(u) + \psi(v)] - \psi(tu + (1-t)v)$$

The area of Integral inequalities has become one of the most dynamic of Mathematical Sciences, both pure and applied, which translates into a constant increase in the number of researchers and the results obtained in recent years. Within these, there is an inequality that is considered fundamental and that provides simple bounds for the integral mean value of a particular class of functions: convex functions, and it is the so-called Hermite-Hadamard inequality (see, e.g., [11, 12, 4]).

Let $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex function defined on the interval I of real numbers and $a_1, a_2 \in I$ with $a_1 < a_2$. The following inequality

$$\varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \leq \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} \varphi(u) du \leq \frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)}{2}$$

holds. Since its discovery, this inequality has received considerable attention, some extensions and generalizations of this inequality, with different fractional and generalized operators and using different convexity operators, can be consulted in [2, 3, 8, 9, 16, 18, 18, 19, 23].

It is known that fractional calculus, that is, calculus with derivatives and integrals of non-integer order, despite being as old as classical calculus, has been gaining attention in the last 40 years and new operators have been defined, which have proven its usefulness in different applications. In particular, new integral operators have appeared that are natural generalizations of the classical fractional Riemann-Liouville integral. In a previous work (see [13]) the authors define a generalized operator that contains, as particular cases, several of the known fractional integral operators.

Definition 27. The k -generalized fractional Riemann-Liouville integral of order α with $\alpha \in \mathbb{R}$, and $s \neq -1$ of an integrable function $\varphi(u)$ on $[0, \infty)$, are given as follows (right and left, respectively):

$${}^s J_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}} \varphi(u) = \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha)} \int_{a_1}^u \frac{F(\tau, s) \varphi(\tau) d\tau}{[\mathbb{F}(u, \tau)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}, \quad (4)$$

$${}^s J_{F, a_2^-}^{\frac{\alpha}{k}} \varphi(u) = \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha)} \int_u^{a_2} \frac{F(\tau, s) \varphi(\tau) d\tau}{[\mathbb{F}(\tau, u)]^{1-\frac{\alpha}{k}}},$$

with $F(\tau, 0) = 1$, $\mathbb{F}(u, \tau) = \int_{\tau}^u F(\theta, s) d\theta$ and $\mathbb{F}(\tau, u) = \int_u^{\tau} F(\theta, s) d\theta$.

With the functions Γ (see [22, 23, 24, 26, 27]) and Γ_k defined by (cf. [4]):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau, \quad \Re(z) > 0,$$

$$\Gamma_k(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau^k/k} d\tau, \quad k > 0.$$

It is clear that if $k \rightarrow 1$ we have $\Gamma_k(z) \rightarrow \Gamma(z)$, $\Gamma_k(z) = (k)^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right)$ and $\Gamma_k(z+k) = z \Gamma_k(z)$. As well, we define the k -beta function as follows

$$B_k(u, v) = \frac{1}{k} \int_0^1 \tau^{\frac{u}{k}-1} (1-\tau)^{\frac{v}{k}-1} d\tau,$$

notice that $B_k(u, v) = \frac{1}{k}B(\frac{u}{k}, \frac{v}{k})$ and $B_k(u, v) = \frac{\Gamma_k(u)\Gamma_k(v)}{\Gamma_k(u+v)}$.

The main purpose of this paper, using the generalized fractional integral operator of the Riemann-Liouville type, from Definition 27, is to establish several integral inequalities of Hermite-Hadamard type, which contain as particular cases, several of those reported in the literature.

Main Results

Let $\varphi : I^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ be a given function, where $a_1, a_2 \in I^\circ$ with $0 < a_1 < a_2 < \infty$. We assume that $\varphi \in L_1[a_1, a_2]$ such that ${}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\varphi(u)$ and ${}^sJ_{F, a_2^-}^{\frac{\alpha}{k}}\varphi(u)$ are well defined. We define

$$\tilde{\varphi}(u) := \varphi(a_1 + a_2 - u), \quad u \in [a_1, a_2]$$

and

$$G(u) := \varphi(u) + \tilde{\varphi}(u), \quad u \in [a_1, a_2].$$

Notice that by using the change of variables $w = \frac{\tau - a_1}{u - a_1}$, we have that (4) becomes in

$${}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\varphi(u) = \frac{(u - a_1)}{k\Gamma_k(\frac{\alpha}{k})} \int_0^1 \frac{F(wu + a_1(1 - w), s)\varphi(wu + a_1(1 - w))dw}{[\mathbb{F}(u, wu + a_1(1 - w))]^{1 - \frac{\alpha}{k}}},$$

where $u > a_1$.

Our first result refers to the classes $Q(I)$ and $(\psi, Q(I))$ -convex dominated on I .

Theorem 28. *Let a nonnegative function $\psi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to the class of $Q(I)$. Suppose that the real function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is $(\psi, Q(I))$ -convex dominated on I . If $a_1, a_2 \in I$ with $\varphi, \psi \in L_1[a_1, a_2]$, then we have the following inequalities:*

$$\left| 2 {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}G(a_2) - \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)}\varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \right| \leq 2 {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}(\tilde{\psi}(a_2) + \psi(a_2)) - \psi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)},$$

and

$$\begin{aligned} & \left| [\varphi(a_1) + \varphi(a_2)] \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} - {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\tilde{\varphi}_1(a_2) - {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\varphi_1(a_2) \right| \\ & \leq [\psi(a_1) + \psi(a_2)] \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} - {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\tilde{\psi}_1(a_2) - {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}\psi_1(a_2), \end{aligned}$$

where $\varphi_1(u) = w(1 - w)\varphi(u)$, $\psi_1(u) = w(1 - w)\psi(u)$.

Remark 29. *This Theorem contains as a particular case Theorem 7 of [21], if we take $F \equiv 1$ and $\alpha = k$.*

Remark 30. *Under the conditions of the above Remark on F and α , if ψ is a convex function and φ is a ψ -dominated function, then this result covers Theorem 1 of [6].*

Remark 31. *If $F(t, \alpha) = 1$ and $k = 1$, ψ a non-negative function and φ is a harmonically ψ -convex function, then we obtain the Theorem 4.1 of [25].*

The following result refers to the classes $P(I)$ and $(\psi, P(I))$ -convex dominated on I .

Theorem 32. *Let a nonnegative function $\psi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to the class of $P(I)$. The real function $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called $(\psi, P(I))$ -convex dominated on I . If $a_1, a_2 \in I$ with $\varphi, \psi \in L_1[a_1, a_2]$, then we have the following inequalities:*

$$\left| {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}G(a_2) - \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)}\varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \right| \leq {}^sJ_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}}(\tilde{\psi}(a_2) + \psi(a_2)) - \psi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)},$$

and

$$\left| [\varphi(a_1) + \varphi(a_2)] \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} - {}^s J_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}} \tilde{\varphi}(a_2) \right| \leq [\psi(a_1) + \psi(a_2)] \frac{[\mathbb{F}(a_2, a_1)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} - {}^s J_{F, a_1^+}^{\frac{\alpha}{k}} \tilde{\psi}(a_2)$$

Remark 33. If in the previous result we do $F \equiv 1$ and $\alpha = k$, then it reduces to Theorem 4 of [21].

Concluding Remarks

This paper gives new inequalities of the Hermite-Hadamard type, in two different classes of convex dominated functions, some related inequalities (fractional or not) are also obtained as particular cases of our results. Apart from the above, we must add that with the operators of the Definition 27, we can generalize different results already reported in the literature, obtained for different classes of dominated convex functions, such as those of [14, 15, 25], which opens up new research possibilities.

References

- [1] Agarwal, Praveen, Mohamed Jleli, and Muharrem Tomar. "Certain Hermite-Hadamard type inequalities via generalized k-fractional integrals." *Journal of inequalities and applications* 2017.1 (2017): 1-10.
- [2] M. A. Ali, J. E. Nápoles, A. Kashuri, Z. Zhang. "Fractional non conformable Hermite-Hadamard inequalities for generalized ϕ -convex functions" to appear in *Fasciculi Mathematici*.
- [3] Bermudo, S., P. Kórus, and JE Nápoles Valdés. "On q-Hermite-Hadamard inequalities for general convex functions." *Acta mathematica hungarica* (2020): 1-11.
- [4] Diaz, Rafael, and Eddy Pariguan. "On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol." *Divulgaciones Matemáticas* 15.2 (2007): 179-192.
- [5] Dragomir, S. S., and C. E. M. Pearce. "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000." Online: [http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/hermite hadamard. html](http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/hermite%20hadamard.html) (2004).
- [6] Dragomir, Sever S., Charles Edward Miller Pearce, and Josep Pecaric. "Means, g-convex dominated functions & Hadamard-type inequalities." *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences* 18.2 (2002): 161-173.
- [7] Dragomir, S. S., Josip Pecaric, and L-Erik Persson. "Some inequalities of Hadamard type." *Soochow J. Math* 21.3 (1995): 335-341.
- [8] Galeano Delgado, Juan Gabriel, Juan Eduardo Napoles Valdes, and Edgardo Pérez Reyes. "Several integral inequalities for generalized Riemann-Liouville fractional operators." *Communications Series A1 Mathematics & Statistics* 70.1 (2021).
- [9] J. D. Galeano, J. E. Nápoles, E. Pérez, "Concerning to the generalized Hermite-Hadamard integral inequality." *Submitted*.
- [10] Godunova, E. K., and V. I. Levin. "Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkii. Vycislitel. Mat. i." *Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva* 9 (1985): 138-142.
- [11] Hadamard, Jacques. "Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann." *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1893): 171-216.
- [12] Hermite, C. "Sur deux limites d'une intégrale définie." *Mathesis* 3.1 (1883): 1-82.
- [13] Galeano, Juan D., Juan E. Nápoles, and Edgardo Perez. "On a general formulation of the fractional operator Riemann-Liouville and related inequalities." *Submitted*.

- [14] Hwang, Shiow-Ru, Ming-In Ho, and Chung-Shin Wang. "Inequalities of Fejér Type for G-convex Dominated Functions." *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences (TOJMS)* 25.1 (2009).
- [15] Kavurmaci, Havva, M. E. Ozdemir, and Mehmet Zeki Sarikaya. "New definitions and theorems via different kinds of convex dominated functions." *RGMI Res. Rep. Coll* 15 (2012).
- [16] Kórus, Péter, Luciano M. Lugo, and Juan E. Nápoles Valdés. "Integral inequalities in a generalized context." *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 57.3 (2020): 312-320.
- [17] J. E. Nápoles. "Hermite-Hadamard inequality in generalized context." *VI Colloquium on applied Mathematics and II International meeting of applied mathematics*. UNIMILITAR, Bogotá, Colombia, November 11-13, 2020.
- [18] J. E. Nápoles. "New generalized fractional integral inequalities of Hermite-Hadamard type for harmonically convex functions." *XVI International Meeting of Mathematics, Barranquilla, Colombia NOVEMBER 17-20, (2020)*.
- [19] Valdés, Juan E. Nápoles, Florencia Rabossi, and Aylén D. Samaniego. "Convex functions: Ariadne's thread or Charlotte's spiderweb?." *Advanced Mathematical Models & Applications* Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191.
- [20] Nápoles Valdés, Juan E., José M. Rodríguez, and José M. Sigarreta. "New Hermite-Hadamard Type Inequalities Involving Non-Conformable Integral Operators." *Symmetry* 11.9 (2019): 1108.
- [21] Ozdemir, M. Emin, Mevlut Tunc, and Havva Kavurmaci. "Two new different kinds of convex dominated functions and inequalities via Hermite-Hadamard type." *arXiv preprint arXiv:1202.2055* (2012).
- [22] Qi, Feng, and Bai-Ni Guo. "Integral representations and complete monotonicity of remainders of the Binet and Stirling formulas for the gamma function." *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 111.2 (2017): 425-434.
- [23] Qi, Feng, et al. "Generalized k-fractional conformable integrals and related inequalities." *AIMS Mathematics* 4.3 (2019): 343-358.
- [24] Rainville, E. D., and Special Functions. "The Macmillan Co." *New York* 1960 (1960).
- [25] Set, Erhan, et al. "On dominated classes of harmonic convex functions and associated integral inequalities." *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)* 13.1 (2020): 17-35.
- [26] Yang, Zhen-Hang, and Jing-Feng Tian. "Monotonicity and inequalities for the gamma function." *Journal of Inequalities and Applications* 2017.1 (2017): 1-15.
- [27] Yang, Zhen-Hang, and Jingfeng Tian. "Monotonicity and sharp inequalities related to gamma function." *J. Math. Inequal* 12.1 (2018): 1-22.

Desigualdades integrales via operadores fraccionarios y generalizados

Autor: Juan Eduardo Napoles Valdes
 FaCENA, UNNE y FRRE-UTN, Argentina
 E-mail: jnapoles@exa.unne.edu.ar

Resumen: En este trabajo, presentamos algunos operadores integrales fraccionarios y generalizados, analizamos su relación con distintos operadores diferenciales locales y presentamos algunas direcciones de trabajo abiertas.

Palabras clave: integral inequalities, fractional integral operators, generalizaed calculus, convex functions

Introducción

En todo el trabajo, I es un intervalo real, cerrado y acotado. Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa sobre el intervalo I , si la desigualdad

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (5)$$

se cumple para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Decimos que f es cóncava si $-f$ es convexa. La desigualdad siguiente

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (6)$$

se cumple para cualquier función convexa f en $[a, b]$.

Esta desigualdad fue publicada por Hermite en 1883 e, independientemente, por Hadamard en 1893. Da una estimación del valor medio de una función convexa y observa que también proporciona un análisis de la Desigualdad de Jensen.

Esta desigualdad ha sido objeto de enorme atención en los últimos 50 años, en varias direcciones de trabajo:

- 1) Usando diferentes nociones de convexidad.
- 2) Refinamiento de la malla utilizada.
- 3) Mejora de las estimaciones de los miembros izquierdo y derecho de (6).
- 4) Usando nuevos operadores integrales generalizados y fraccionarios.

Para facilitar la comprensión del tema, presentamos la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville (con $0 \leq a_1 < t < a_2 \leq \infty$) ya que es el operador integral "base" del cálculo fraccionario y generalizado.

Definición 34. Sea $\phi \in L_1[a_1, a_2]$. Entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ está definida por (derecha e izquierda, respectivamente):

$${}^{\alpha}I_{a+}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad x > a \quad (7)$$

$${}^{\alpha}I_{b-}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad x < b. \quad (8)$$

En nuestro trabajo, teniendo en cuenta las direcciones de trabajo antes presentadas, se hace un recuento del desarrollo de las Desigualdades Integrales en los últimos tiempos, como centro de atención de investigadores matemáticos puros y aplicados.

Referencias

- [1] M. A. Ali, J. E. Nápoles V., A. Kashuri, Z. Zhang, "Fractional non conformable Hermite-Hadamard inequalities for generalized η -convex functions". *To appear in Fasciculi Mathematici*.
- [2] B. Bahtiyar, J. E. Nápoles V., "New integral inequalities of Hermite-Hadamard type in a generalized context." *Submitted*.
- [3] Bermudo, S., P. Kórus, and JE Nápoles Valdés. "On q -Hermite-Hadamard inequalities for general convex functions." *Acta mathematica hungarica* (2020): 1-11.
- [4] M. Bohner, A. Kashuri, P. O. Mohammed, J. E. Nápoles V., "Hermite-Hadamard-type Inequalities for Integrals arising in Conformable Fractional Calculus." *Submitted*.
- [5] Fleitas, Alberto, J. A. Méndez, J. E. Nápoles Valdés, J. M. Sigarreta. "On fractional Liénard-type systems." *Revista mexicana de física* 65.6 (2019): 618-625.
- [6] A. Fleitas, J. E. Nápoles, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta. "Note on the generalized conformable derivative." *Revista de la Unión Matemática Argentina* (2019).
- [7] Delgado, Juan Galeano, J. E. Nápoles V., E. Pérez Reyes, M. Vivas-Cortez. "The Minkowski Inequality for Generalized Fractional Integrals." *Appl. Math* 15.1 (2021): 1-7.
- [8] Guzmán, Paulo M., Péter Kórus, and Juan E. Nápoles Valdés. "Generalized Integral Inequalities of Chebyshev Type." *Fractal and Fractional* 4.2 (2020): 10.
- [9] Guzman, Paulo M., G. Langton, L. M. Lugo, J. Medina, J. J. E. Nápoles. "A new definition of a fractional derivative of local type." *J. Math. Anal.* 9.2 (2018): 88-98.
- [10] Guzman, P. M., Lugo, L. M., Nápoles Valdés, J. E., & Vivas-Cortez, M. "On a new generalized integral operator and certain operating properties." *Axioms* 9.2 (2020): 69.
- [11] Guzmán, Paulo M., and Juan E. Nápoles Valdés. "Generalized fractional Grüss-type inequalities." *Contributions to Mathematics* (2020).
- [12] Guzmán, Paulo M., Juan E. Nápoles Valdés, and Yusif S. Gasimov. "Integral inequalities within the framework of generalized fractional integrals." *Submitted*.
- [13] Kalinin, Sergey Ivanovich. "(0, 0)-Convex functions and their properties." *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"* 142 (2017): 81-87.
- [14] Kalinin, S. I. "(0, 0)-Convex Functions and their properties." *Journal of Mathematical Sciences* 241.6 (2019): 727-735.
- [15] Kórus, Péter, Luciano M. Lugo, and Juan E. Nápoles Valdés. "Integral inequalities in a generalized context." *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 57.3 (2020): 312-320.
- [16] L. M. Lugo, J. E. Nápoles Valdés. "Hermite-Hadamard Type Inequalities with Generalized Integrals for various Kinds of Convexity." *Submitted*.

III Encuentro Matemático del Caribe

- [17] Martinez, M., Pshtiwan Othman Mohammed, and Juan E. Napoles Valdes. "Non-conformable fractional Laplace transform." *Kragujevac Journal of Mathematics* 46.3 (2022): 341-354.
- [18] J. E. Nápoles Valdés. "A Generalized k-Proportional Fractional Integral Operators with General Kernel." *Submitted*.
- [19] J. E. Nápoles Valdés. "Some integral inequalities in the framework of Generalized k-Proportional Fractional Integral Operators with General Kernel." *Submitted*.
- [20] Valdes, Juan E. Nápoles, Paulo M. Guzmán, and Luciano M. Lugo. "Some new results on nonconformable fractional calculus." *Advances in Dynamical Systems and Applications* 13.2 (2018): 167-175.
- [21] Valdés, J. N., Guzmán, P. M., Lugo, L. M., & Kashuri, A. "The local non-conformable derivative and Mittag-Leffler function." *Sigma J. Eng. Nat. Sci.* 38.2 (2020): 1007-1017.
- [22] Valdés, Juan E. Nápoles, Florencia Rabossi, and Aylén D. Samaniego. "Convex functions: Ariadne's thread or Charlotte's spiderweb?." *Advanced Mathematical Models & Applications* Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191.
- [23] Nápoles Valdés, Juan E., José M. Rodríguez, and José M. Sigarreta. "New Hermite–Hadamard Type Inequalities Involving Non-Conformable Integral Operators." *Symmetry* 11.9 (2019): 1108.

Acerca de la desigualdad de Simpson via integrales generalizadas pesadas

Autora: Florencia Rabossi
Universidad Nacional del Nordeste
E-mail: florenciarabossi@exa.unne.edu.ar

Resumen: En este trabajo establecemos una identidad de tipo Simpson y varias desigualdades de tipo Simpson para integrales generalizadas pesadas.

Palabras claves: Desigualdad integral de Simpson, Operadores integrales pesados, funciones (α, m) -convexas.

Introducción

La siguiente desigualdad se conoce como Desigualdad integral de Simpson:

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4, \quad (9)$$

donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es cuatro veces diferenciable sobre (a, b) y $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{\tau \in (a,b)} |f^{(4)}(\tau)| < \infty$.

En [7] el autor introduce la clase de funciones (α, m) -convexas, de la siguiente manera: La función $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es (α, m) -convexa, donde $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$, si para cada $a, b \in [0, \infty)$ y $t \in [0, 1]$, se tiene:

$$f(ta + m(1-t)b) \leq t^{\alpha} f(a) + m(1-t)^{\alpha} f(b).$$

Para favorecer la comprensión del tema, presentamos la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville (con $0 \leq a < t < b \leq \infty$). La primera es la integral fraccionaria clásica de Riemann-Liouville.

Definición 35. Sea $\phi \in L_1[a, b]$. Entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ se definen por (derecha e izquierda respectivamente):

$${}^{\alpha}I_{a+}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad x > a \quad (10)$$

$${}^{\alpha}I_{b-}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad x < b. \quad (11)$$

Los operadores integrales que serán usados en nuestro trabajo serán presentados en la siguiente definición.

Definición 36. Sea $f \in L([a, b])$. La integral generalizada pesada de la función f por derecha e izquierda, respectivamente, se definen como:

$${}^qJ_{a+}^k f(t) = \int_a^t k' \left(\frac{t-\tau}{t-q} \right) f(\tau) d\tau \quad (12)$$

$${}^pJ_{b-}^k f(t) = \int_t^b k' \left(\frac{\tau-t}{t-p} \right) f(\tau) d\tau \quad (13)$$

Observación 37. Si tomamos $w'(t) = \frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}$, obtenemos la definición de la Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville. Si por el contrario $w'(t) \equiv 1$, entonces obtenemos la Integral clásica de Riemann.

Por supuesto que hay otros operadores integrales conocidos, fraccionarios o no, que se pueden obtener como casos particulares del anterior, pero lo dejamos para los lectores interesados.

El siguiente resultado será fundamental en nuestro trabajo.

Lema 38. Sea $0 < m \leq 1$; $f : [ma, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a < b$ con $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Si $f \in L^1([ma, b])$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{-ma+w} \left[k(1)f(w) - k(0)f\left(\frac{ma+w}{2}\right) \right] - \frac{4}{(-ma+w)^2} J_{w^-}^k f\left(\frac{ma+w}{2}\right) \\ + & \frac{2}{w-b} \left[k(t)f(w) - k(0)f\left(\frac{w+b}{2}\right) \right] - \frac{4}{(w-b)^2} J_{w^+}^k f\left(\frac{w+b}{2}\right) \\ = & \int_0^1 k(t) \cdot f' \left(\frac{1-t}{2}ma + \frac{1+t}{2}w \right) dt - \int_0^1 k(t) \cdot f' \left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}b \right) dt \end{aligned} \quad (14)$$

A partir de éste, obtenemos diferentes desigualdades de tipo Simpson, que son generalizaciones de varios reportados en la literatura.

Referencias

- [1] Du, Tingsong, Yujiao Li, and Zhiqiao Yang. "A generalization of Simpson's inequality via differentiable mapping using extended (s, m) -convex functions." *Applied mathematics and computation* 293 (2017): 358-369.
- [2] Du, Ting-Song, Jia-Gen Liao, and Yu-Jiao Li. "Properties and integral inequalities of Hadamard-Simpson type for the generalized (s, m) -preinvex functions." *J. Nonlinear Sci. Appl* 9.5 (2016): 3112-3126.
- [3] Du, Tingsong, et al. "Estimation type results associated to k -fractional integral inequalities with applications." *Journal of King Saud University-Science* 31.4 (2019): 1083-1088.
- [4] Du, Tingsong, et al. "Some k -fractional extensions of the trapezium inequalities through generalized relative semi- (m, h) -preinvexity." *Applicable Analysis* 100.3 (2021): 642-662.
- [5] Hsu, K. C., S. R. Hwang, and K. L. Tseng. "Some extended Simpson-type inequalities and applications." *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* 43.2 (2017): 409-425.
- [6] Luo, Chunyan, and Tingsong Du. "Generalized Simpson type inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals and their applications." *Filomat* 34.3 (2020): 751-760.
- [7] Miheşan, V. G. "A generalization of the convexity." *Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania*. 1993.
- [8] Noor, M. A., K. I. Noor, and M. U. Awan. "Simpson-Type Inequalities for Geometrically Relative Convex Functions." *Ukrainian Mathematical Journal* 70.7 (2018).
- [9] Valdés, Juan E. Nápoles, Florencia Rabossi, and Aylén D. Samaniego. "Convex functions: Ariadne's thread or Charlotte's spiderweb?." *Advanced Mathematical Models & Applications* Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191.
- [10] Sarikaya, Mehmet Zeki, and Sakine Bardak. "Generalized Simpson type integral inequalities." *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)* 7.1 (2019): 186-191.
- [11] Set, Erhan, Ahmet Ocak Akdemir, and Emin M. Özdemir. "Simpson type integral inequalities for convex functions via Riemann-Liouville integrals." *Filomat* 31.14 (2017): 4415-4420.

Extrapolación en espacios de Köthe

Autor: Víctor Juan Hernández Del Toro
 Fundación Universitaria Colombo Internacional
 E-mail: vhernandez@unicolombo.edu.co

Resumen: Cuando X_0 y X_1 son espacios de Banach incrustados en un espacio topológico de Hausdorff, un espacio interpolado entre X_0 y X_1 es un espacio de Banach E tal que

$$X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1$$

y cumple con la siguiente propiedad: si $T : X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$ es un operador lineal cuyas restricciones a X_0 y X_1 son respectivamente $T : X_0 \rightarrow X_0$ y $T : X_1 \rightarrow X_1$, entonces $T : E \rightarrow E$.

En la ponencia se presenta un resultado de Nigel Kalton (ver [1]) que demuestra que para un espacio de Köthe X (espacios normados de funciones de L_0 con bola unitaria cerrada y que preservan norma) p -convexo y q -cóncavo con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, existe un único espacio Y de Köthe tal que X es un espacio interpolado entre L_2 y Y .

Palabras clave: Espacio de Köthe, espacios interpolados

Referencias

- [1] Kalton, N. J. "Differentials of complex interpolation processes for Köthe function spaces." *Transactions of the American Mathematical Society* 333.2 (1992): 479-529.

Matemática aplicada

A general condition for uniqueness in the multi-marginal optimal transport

Authors: Adolfo Vargas-Jiménez, Brendan Pass
 University of Alberta
 E-mail: vargasji@ualberta.ca

Abstract: We establish a general condition on the cost function to obtain uniqueness and Monge solutions in the multi-marginal optimal transport problem. This work, naturally generalizes the results obtained in [13], which is the most general theory known in multi-marginal optimal transport. Furthermore, we provide a variety of examples obtaining a generalization to the main result in [18] and a special result in [19], studied in a earlier work by the present authors.

Key words: Multi-Marginal optimal transport, Kantorovich formulation, Monge formulation, Monge solution.

Introduction

Let $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ be open bounded sets and $P(X_i)$ the set of all Borel probability measures on X_i , with $i = 1, \dots, m$. Given a continuous real-valued cost function c on the product space $\prod_{i=1}^m X_i$, and measures $\mu_i \in P(X_i)$, the Kantorovich formulation of the multi-marginal optimal transportation problem asks to minimize

$$\int_{\prod_{i=1}^m X_i} c(x_1, \dots, x_m) d\mu, \quad (\text{KP})$$

over the admissible class

$$\Pi(\mu_1, \dots, \mu_m) := \left\{ \mu \in P\left(\prod_{i=1}^m X_i\right) : \mu(X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_m) = \mu_i(A_i), \right. \\ \left. \text{for every measurable set } A_i \subseteq X_i, \quad 1 \leq i \leq m \right\}.$$

On the other hand, in Monge's formulation of the multi-marginal optimal transportation one seeks to minimize

$$\int_{X_1} c(x_1, T_2 x_1, \dots, T_m x_1) d\mu_1, \quad (\text{MP})$$

over its admissible class: the set of all $(m-1)$ -tuples of maps (T_2, \dots, T_m) satisfying the constraint $(T_i)_\# \mu_1 = \mu_i$ for every $i = 2, \dots, m$. Here, $(T_i)_\# \mu_1$ denotes the *image measure* of μ_1 through T_i , which is defined as $(T_i)_\# \mu_1(A) = \mu_1(T_i^{-1}(A))$, for any Borel set $A \subseteq X_i$. The admissible class in (MP) can be seen as a subclass of $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_m)$, as for each $(m-1)$ -tuple (T_2, \dots, T_m) satisfying the image measure constraint in (MP), we get $\mu = (Id, T_2, \dots, T_m)_\# \mu_1 \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_m)$ and

$$\int_{\prod_{i=1}^m X_i} c(x_1, \dots, x_m) d\mu = \int_{X_1} c(x_1, T_2 x_1, \dots, T_m x_1) d\mu_1.$$

This fact, let us interpret (KP) as a relaxation of (MP).

The classical optimal transport (the case $m = 2$) has an abundant literature, which reflects its natural connections with different areas of mathematics and with a generous variety of applications, for instance,

see [20][21][22]. The multi-marginal optimal transport (the case $m \geq 3$), although less active, has also generated several applications, among them, matching in economics [4][6][16] and density functional theory in computation [2] [7]. The reader is also referred to [14] for an overview.

One of the widely known result in the classical optimal transport is that, under a twist condition on c (the map $x_2 \mapsto D_{x_1}c(x_1, x_2)$ is injective, for each fixed $x_1 \in X_1$) and assuming μ_1 absolutely continuous, there exists a unique solution to (KP) and it is induced by a map [1][5][9][10]. There are two works in the multi-marginal case, with general conditions on the cost function c , in which this result was also achieved. The first work was developed in [15], focusing on second order differential conditions on c , however, these conditions are too strong, and so, there are costs providing the same result and not satisfying them. In the second work [13], was established an analogue of the twist condition, encapsulating the results obtained in [3, 8, 11, 12, 15, 16, 17], in which were got for special costs functions, uniqueness and Monge structure of the respective optimal measures in (KP). This condition was called *twist on c -splitting sets* and states that for every $x_1 \in X_1$ fixed, the map $(x_2, \dots, x_m) \mapsto D_{x_1}c(x_1, x_2, \dots, x_m)$ is injective on on special sets, called *c -splitting sets*.

As was shown in [13], the twist on c -splitting sets condition is weaker than the second order differential condition on c , presented in [15], converting the work in [13] into the most general theory known guaranteeing Monge solutions and uniqueness results in the multi-marginal setting. Now, although fairly general, we can find costs providing Monge solutions and not being twisted on splitting sets [19]. One identifiable reason of this fact is that for some classes of functions, regularity conditions on some of the marginals (in addition to a regularity condition on μ_1) are necessary. It is natural, then, to consider a condition on the cost c that generalizes the twist on c -splitting sets condition, and with some flexibility on the regularity of some of the marginals.

In this talk, we present a condition focusing, in particular, in c -splitting functions and the points where some of them are differentiable (the ones corresponding to the marginals different than μ_1 where regularity is needed). More specifically, we require the mapping $(x_2, \dots, x_m) \mapsto D_{x_1}c(x_1, x_2, \dots, x_m)$ to be injective on special subsets generated by c -splitting sets that depend on c -splitting functions. Furthermore, this condition encapsulate the twist on splitting sets conditions developed in [13], as well as, the main result in [18] and partial results in [19].

References

- [1] Brenier, Yann. "Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs." *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305 (1987): 805-808.
- [2] Buttazzo, Giuseppe, Luigi De Pascale, and Paola Gori-Giorgi. "Optimal-transport formulation of electronic density-functional theory." *Physical Review A* 85.6 (2012): 062502.
- [3] Carlier, Guillaume. "On a class of multidimensional optimal transportation problems." *Journal of convex analysis* 10.2 (2003): 517-530.
- [4] Carlier, Guillaume, and Ivar Ekeland. "Matching for teams." *Economic theory* 42.2 (2010): 397-418.
- [5] McCann, Robert J. "Polar factorization of maps on Riemannian manifolds." *Geometric & Functional Analysis GAFA* 11.3 (2001): 589-608.
- [6] Chiappori, Pierre-André, Robert J. McCann, and Lars P. Nesheim. "Hedonic price equilibria, stable matching, and optimal transport: equivalence, topology, and uniqueness." *Economic Theory* 42.2 (2010): 317-354.
- [7] Cotar, Codina, Gero Friesecke, and Claudia Klüppelberg. "Density functional theory and optimal transportation with Coulomb cost." *Communications on Pure and Applied Mathematics* 66.4 (2013): 548-599.
- [8] Gangbo, Wilfrid, and Andrzej Świąch. "Optimal maps for the multidimensional Monge-Kantorovich problem." *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 51.1 (1998): 23-45.

- [9] Gangbo, W. "Habilitation thesis." *Universite de Metz, available at* (1995).
- [10] Gangbo, Wilfrid, and Robert J. McCann. "The geometry of optimal transportation." *Acta Mathematica* 177.2 (1996): 113-161.
- [11] Heinich, Henri. "Problème de Monge pour n probabilités." *Comptes Rendus Mathématique* 334.9 (2002): 793-795.
- [12] Kim, Young-Heon, and Brendan Pass. "Multi-marginal optimal transport on Riemannian manifolds." *American Journal of Mathematics* 137.4 (2015): 1045-1060.
- [13] Kim, Young-Heon, and Brendan Pass. "A general condition for Monge solutions in the multi-marginal optimal transport problem." *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.2 (2014): 1538-1550.
- [14] Pass, Brendan. "Multi-marginal optimal transport: theory and applications." *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 49.6 (2015): 1771-1790.
- [15] Pass, Brendan. "Uniqueness and Monge solutions in the multimarginal optimal transportation problem." *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 43.6 (2011): 2758-2775.
- [16] Pass, Brendan. "Multi-marginal optimal transport and multi-agent matching problems: Uniqueness and structure of solutions." *Discrete & Continuous Dynamical Systems* 34.4 (2014): 1623.
- [17] B. Pass, A. Pinamonti and M. Vedovato. "Multi-marginal optimal transport on the Heisenberg group." *To appear in Methods Appl. Anal.*
- [18] Pass, Brendan W., and Adolfo Vargas-Jiménez. "Multi-marginal optimal transportation problem for cyclic costs." *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 53.4 (2021): 4386-4400.
- [19] Pass, Brendan, and Adolfo Vargas-Jiménez. "Monge solutions and uniqueness in multi-marginal optimal transport via graph theory." *arXiv preprint arXiv:2104.09488* (2021).
- [20] Santambrogio, Filippo. "Optimal transport for applied mathematicians." *Birkäuser, NY* 55.58-63 (2015): 94.
- [21] Villani, Cédric. *Topics in optimal transportation*. Vol. 58. American Mathematical Soc., 2021.
- [22] Villani, Cédric. *Optimal transport: old and new*. Vol. 338. Berlin: Springer, 2009.

Un modelo de tráfico vehicular multiclase con función de velocidad discontinua

Autor: Rafael Henrique Ordoñez Cardales
Universidad Popular del Cesar
E-mail: reordonezc@unicesar.edu.co

Resumen: Construimos un esquema numérico, que es similar a uno propuesto por [1], descomponiendo la función de velocidad discontinua en una función continua de Lipschitz más una función de Heaviside y diseñar un esquema el cuál es dividido en las dos partes en las que se descompuso la función de velocidad. La parte del esquema relacionada con la función de flujo discontinuo se maneja mediante un paso semi-implícito que, sin embargo, no involucra la solución de sistemas de ecuaciones lineales o no lineales. Se prueba que todo el esquema converge a una solución débil en el caso escalar. El esquema puede extenderse de manera sencilla al modelo LWR multiclase (MCLWR), que se define por un sistema hiperbólico de N leyes de conservación para N clases de conductores que se distinguen por sus velocidades. Se muestra que el esquema multiclase satisface un principio de región invariante, es decir, todas las densidades son no negativas y su suma no excede un valor máximo. En los casos escalar y multiclase, no se involucra la regularización de flujo ni el resolovedor de Riemann, y la condición CFL no es más restrictiva que para un esquema explícito para la parte continua del flujo. Se presentan ejemplos numéricos para los casos escalares y multiclase.

Palabras clave: Modelo de tráfico vehicular, leyes de conservación, flujo discontinuo.

Referencias

- [1] Towers, John D. "A splitting algorithm for LWR traffic models with flux discontinuous in the unknown." *Journal of Computational Physics* 421 (2020): 109722.
- [2] Benzoni-Gavage, Sylvie, and Rinaldo M. Colombo. "An n -populations model for traffic flow." *European Journal of Applied Mathematics* 14.5 (2003): 587.
- [3] Wong, G. C. K., and S. C. Wong. "A multi-class traffic flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers." *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 36.9 (2002): 827-841.

Maximización de la ecuación de Weizsacker-Williams en la aniquilación Electrón-Positrón, y probabilidad de creación de quarks pesados

Autores: Carlos G. Moya Egoavil, Antonio I. Rivasplata Mendoza
Escuela de posgrado, Universidad Nacional de Trujillo, Departamento de Física,
Universidad Nacional de Trujillo
E-mail: cmoya@unitru.edu.pe, antrivas@unitru.edu.pe

Resumen: El presente trabajo se determinó y simuló la ecuación para la creación de quarks pesados obtenidos por la aniquilación de partícula-antipartícula, exactamente electrón positrón en hadrones. El método utilizado para determinar la formulación ha sido maximizando la ecuación de Weizsacker-Williams, una aproximación de la sección eficaz para varios eventos dados por colisiones leptónicas relativistas; se aplicó la técnica de Altarelli-Parisi, que nos proporciona la función de densidad probabilística para generar un par de quarks $q - \bar{q}$, en el estado final del sistema y se simuló con la obtención del código de programación en MatLab. El programa computacional permitió diagramar la curva de densidad de probabilidad, bajo la sección eficaz de dicha producción. El presente trabajo considera variables cinemáticas y dinámicas relativistas en toda colisión de leptones a altas energía, así como los principios de conservación energía-momento evidenciando la generación de nuevas partículas elementales pesadas.

Palabras clave: quarks; Weizsacker-Williams; Altarelli-Parisi; sección eficaz

Diseño de un modelo de valor agregado basado en sistemas dinámicos estocásticos

Autores: José Gregorio Solorzano, Yolima Rocha Fontalvo, Yesika Paola Rojas Sandoval
Corporación Universitaria Americana, Universidad del Atlántico, Universidad del Atlántico
E-mails: jsolorzano@coruniamericana.edu.co, yrocha@mail.uniatlantico.edu.co, yesikarojas@mail.Uniatlantico.edu.co

Resumen: En los años recientes, instituciones como el ICFES han generado diversos indicadores para establecer si una institución de educación superior aporta en el desarrollo de competencias de los estudiantes que cursan programas técnicos, tecnológicos y profesionales. En concordancia con esto, el presente trabajo expone los resultados de una investigación que busca diseñar un modelo de valor agregado para estimar la calidad de la educación en éstos. Se desarrolló en dos frentes de trabajo, el primero referente a consolidar una manera de realizar una estimación por programa académico con base en los resultados históricos aplicando el filtro de Kalman (FK), esto partiendo de la consideración que el sistema de resultados de las pruebas Saber Pro es un sistema dinámico estocástico con varianza constante y el segundo fue diseñar un modelo para la estimación por estudiantes, es decir de manera individual el cual pueda tomar los avances académicos que tiene un alumno, evidenciados con el rendimiento académico en los semestres cursados. Como resultados destacables se encuentran que los estudiantes que provienen de instituciones con buen desempeño en saber 11 presentan un menor valor agregado en comparación con aquellos que no proceden de colegios en altas categorías de acuerdo al Icfes. Así mismo, se pudo inferir que los estudiantes con notas en saber 11 por debajo de la media nacional al pasar por las Instituciones de Educación Superior alcanzaron a tener un alto valor agregado.

Palabras clave: Modelo de valor agregado, filtro de Kalman, sistema dinámico estocástico, varianza constante, medición de la calidad de la educación.

Introducción

El Icfes (2014), al referirse a los modelos de valor agregado los considera como "modelos estadísticos que intentan evaluar la efectividad educativa haciendo énfasis en el progreso de los estudiantes en el tiempo"(5). Además se considera que Colombia presenta condiciones favorables para reportar el valor agregado al sistema de educación superior, debido a que los estudiantes presentan un examen estandarizado que es la prueba SABER 11, que luego se puede comparar con la prueba SABER PRO (Icfes, 2014).

Es común encontrar en la literatura modelos que desarrollan diversos métodos estadísticos para determinar el valor agregado, como los realizados por Breslin, T.P. y Samanta, S.K. (2014), quienes establecen un modelo a partir de una regresión logística que considera el modelo de Cobb Douglas con las siguientes variables:

- Capacidad intelectual, a partir del nivel de competencias obtenidas en pruebas censales, matemáticas y comprensión lectora.
- Ranking de la escuela de procedencia
- Factores no observables, error llamado épsilon.

Por otro lado, Metzler, J. y Woessmann, L.(2012) desarrollan una identificación empírica que a su vez realiza correcciones del error de la medida. La fórmula que se plantea tiene foco en las competencias del docente. El análisis es hecho de los estadísticos como media, varianza, homogeneidad, correlación entre las variables. También, Hanushek, E. y Luque, J. (2003) establecen las variables escolares en Perú, a partir de los resultados de TIMSS, a partir de la relación $O = f(X, R)$.

Donde O es el resultado de la estimación, R son las variables referentes de la escuela y X son aquellos valores asociados a la parte socio económica.

Finalmente, Fagioli, L (2014) analiza los resultados entre dos pruebas estandarizadas en diferentes momentos. Las variables son sociales, como origen, etnia, clase social, si reciben almuerzo en el restaurante escolar como medida de la pobreza.

En este trabajo se analizará la factibilidad del uso de un sistema dinámico estocástico para determinar el valor agregado de un grupo de estudiantes de varias instituciones de educación superior del distrito de Barranquilla, Colombia.

Los modelos anteriores relacionan varias de las variables identificadas, sin embargo, ninguno las agrupa en la medida o forma que se requiere para lograr el objetivo de esta investigación. Por tal razón se propuso el siguiente modelo:

$$R_{i,j} = S_{11} + (CP_i)(X_i) + FS + \sigma(1)$$

Dónde: i representa la prueba genérica sobre la cual se hará la estimación, en este caso i varía de 1 hasta 5 por ser cinco pruebas las que se evaluarán en Saber - Pro, en ese mismo subíndice esta j el cual representa el código o número del estudiante del cual se tomarán los datos para la estimación.

S_{11} resultado en saber 11 del estudiante j , CP_i coeficiente de correlación de Pearson el cual establece la correlación existente entre el desempeño académico y los resultados que se obtienen en Saber Pro, el mismo varía de corte a corte que presentara prueba Saber Pro.

X_i en este contexto es el promedio del estudiante j en la competencia i . FS factores sociales que de acuerdo a la correlación realizada en pruebas es de 3. La variación del error está señalada por σ .

El cálculo del valor agregado consiste en comparar el resultado estimado por el modelo con los resultados obtenidos por el estudiante en cada una de las pruebas, si la estimación estuvo por debajo del resultado obtenido se dice que obtuvo valor agregado, en el caso contrario, se plantea una desagregación de valor.

Referencias

- [1] Domingue, Benjamin. "Medición de los efectos de la educación superior en Colombia sobre el aprendizaje estudiantil". *Bogotá: Icfes* (2015).
- [2] Breslin, Thomas P and Samanta, Subarna K. "Value added in undergraduate business education: An empirical analysis." *Modern Economy*, 5. 12 (2014):1138.
- [3] Fagioli, Loris P. "A comparison between value-added school estimates and currently used metrics of school accountability in California." *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 26.2 (2014):203-222.
- [4] Hanushek, Eric A and Luque, Javier A. "Efficiency and equity in schools around the world." *Economics of education Review*, 22.5 (2003):481-502.
- [5] Metzler, Johannes and Woessmann, Ludger. "The impact of teacher subject knowledge on student achievement: Evidence from within-teacher within-student variation." *Journal of development economics*, 99.2 (2012):486-496.

Modelo de optimización multi-objetivo para el problema de localización-inventario y ruteo multi-escalón aplicado a la cadena de suministro humanitaria

Autor: Andrés Guillermo Angarita Monroy, Henry Lamos Díaz

Universidad Industrial de Santander

E-mail: andres2198626@correo.uis.edu.co, hamos@uis.edu.co

Resumen: Los desastres en todo el mundo son cada vez más frecuentes, diversos, complejos y extremadamente desafiantes, ya que causan millones de víctimas y afectan tanto el desarrollo humano como los recursos disponibles. En consecuencia, el presente estudio aborda un problema multi-objetivo de localización, inventario y ruteo multi-escalón (2E-LIRP), el cual apoya la toma de decisiones integrales, para que el encargado de diseñar y gestionar la red logística obtenga una adecuada planeación estratégica frente a la incertidumbre y el impacto negativo que puede generar un evento adverso. Más aún, el problema es formulado como un modelo de programación lineal entera, teniendo como principales objetivos, minimizar los costos logísticos privados y su vez, maximizar el bienestar de las áreas afectadas, considerando demanda dinámica, múltiples productos y flota heterogénea. Debido a la complejidad computacional asociada al modelo, se proponen nuevos enfoques de solución, basados en el diseño de algoritmos metaheurísticos evolutivos; el primero, conocido como algoritmo genético de ordenamiento no dominado versión II (NSGA-II), el segundo, algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto versión II (SPEA-II) y el tercero, llamado algoritmo genético (GA), programados en paralelo y ejecutados individualmente bajo un entorno de cooperación. Finalmente, la experimentación llevada a cabo sobre un conjunto de prueba, compuesto por veinte instancias de diversa complejidad, permite inferir que el enfoque paralelo-cooperativo y netamente paralelo aplicado al NSGA-II, mejora sustancialmente los tiempos de procesamiento y la cantidad de soluciones no dominadas, si se compara con los resultados obtenidos por el SPEA-II, diseñado bajo idénticas condiciones. Además, al construir un GA con estas mismas características, mejora hasta el 50 % de las soluciones, en función de los costos sociales (costos logísticos y humanitarios), con tiempos de cómputo semejantes a su contraparte secuencial.

Palabras clave: Inventario, localización, logística humanitaria, multi-producto, optimización evolutiva, paralelismo, ruteo.

Introducción

La ocurrencia de desastres naturales y sus consecuencias devastadoras son una realidad que se vive año tras año alrededor del mundo. Aproximadamente el 75 % de la población mundial vive en regiones afectadas, al menos una vez entre 1980 y 2017, por un terremoto, un ciclón tropical, una inundación o una sequía. Como consecuencia de estos fenómenos, cada día mueren más de 184 personas en distintas partes del mundo y arrojan un saldo que incluye la destrucción de activos fijos, capital físico, la interrupción de la producción, el comercio y la disminución de los ahorros e inversiones públicas y privadas, que acaban con el progreso en materia de desarrollo económico (Nagurney et al., 2019). Esta problemática ha generado un profundo interés por buscar y establecer los mecanismos más eficientes, que permitan mejorar la respuesta a situaciones de emergencia, dando así lugar al surgimiento de la logística humanitaria como un medio para afrontar los efectos negativos de eventos adversos que ponen en riesgo la integridad o la vida propia del ser humano.

En la actualidad, los desastres, independientemente de su origen (sea natural o humano), son considerados fenómenos sociales cuyos daños sería posible prevenir y mitigar para disminuir o al menos controlar sus

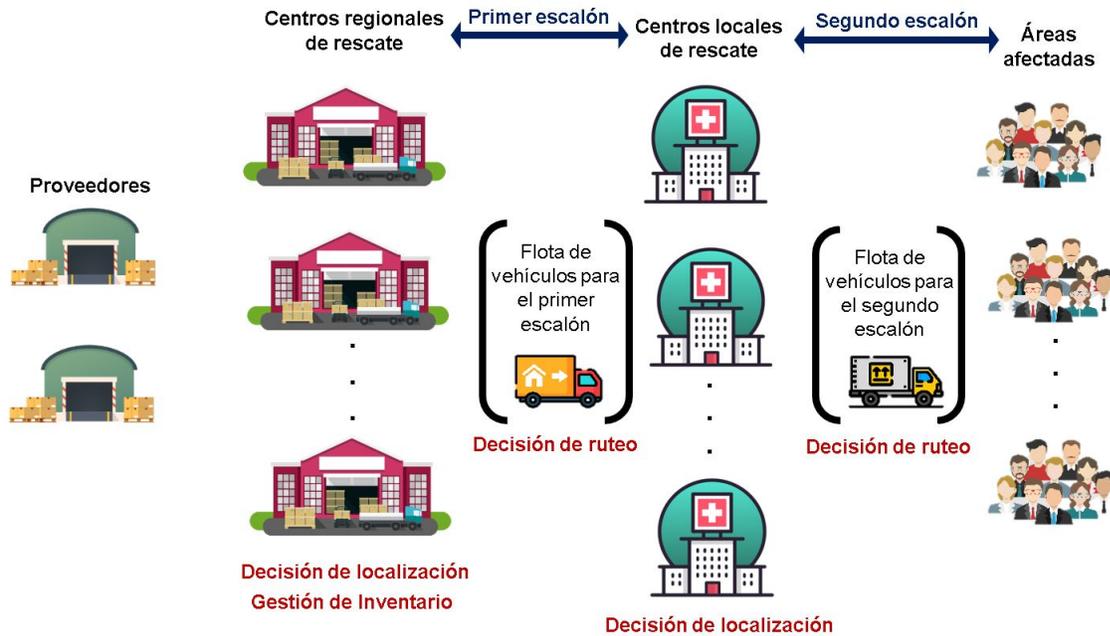


Figura 2: Representación gráfica del 2E-LIRP

efectos (Cecchini et al., 2017). La dificultad para predecir el lugar donde ocurrirá, el momento y magnitud con la cual se presentará, además de la incertidumbre asociada a las características propias de la población, las condiciones de infraestructura existentes y la demanda requerida para atender la situación de emergencia, dan lugar a uno de los mayores desafíos en la logística humanitaria, como lo es, la imprevisibilidad, definida como la ocurrencia de sucesos inesperados (Balcik et al., 2010). L'Hermitte et al. (2016) afirman que la imprevisibilidad, crea barreras y afecta la eficiencia en la cadena de suministro. Así, el adecuado manejo de la cadena de abastecimiento logístico para la atención de desastres y apoyo humanitario, se convierte en un reto muy importante a nivel mundial, pues esta se encarga de estimar, proveer, almacenar, transportar y distribuir el personal, los recursos y servicios requeridos a las zonas afectadas (Talebian Sharif & Salari, 2015), a través de un conjunto de actividades realizadas en diferentes instancias del tiempo, las cuales tienen como finalidad asistir a las personas sobrevivientes luego de un desastre, reducir su impacto y mantener la estabilidad social (Aghajani et al., 2020; Vahdani et al., 2018).

Por esta razón, surge la necesidad de desarrollar un modelo capaz de proporcionar la información suficiente al responsable de la red logística, para que éste tome las mejores decisiones relacionadas con la ubicación, distribución y gestión de inventario, que garanticen finalmente una entrega oportuna de los bienes (productos o servicios) a los grupos de interés (áreas afectadas), minimizando así los impactos negativos de tipo económico y social, ocasionados por la ocurrencia de eventos adversos. Dicho modelo se encuentra asociado al 2E-LIRP, el cual integra tres tipos de decisiones muy importantes dentro de la planeación integral de la logística humanitaria, como lo exponen Rafie-Majd et al. (2018), es decir, decisiones de tipo estratégico: con efectos a largo plazo (ubicación y asignación de instalaciones); decisiones tácticas: a mediano plazo (control de inventario y transporte) y decisiones operativas: diarias o semanales (programación y ruteo), las cuales determinan finalmente la capacidad de respuesta, flexibilidad, eficiencia y eficacia que posee la cadena de suministro. A continuación, se desarrolla una representación esquemática, con el propósito de facilitar la interpretación y comprensión del problema abordado (ver Figura 2).

Interpretación

Como se mencionó anteriormente, el problema abordado considera dos aspectos muy importantes en la planificación y gestión de un desastre, es decir, las fases de preparación (actividades realizadas antes que ocurra el desastre, con el fin de lograr una atención más eficiente) y respuesta (actividades realizadas una vez ocurre el desastre y cuyos objetivos están relacionados con el despliegue de recursos vitales para atender a la población afectada), las cuales pueden ser contextualizadas de la siguiente manera: dado un conjunto de centros regionales de rescate y un conjunto de centros locales de rescate, donde la interacción, centros regionales – centros locales define el primer escalón y además, dada una flota de vehículos para el primer escalón y un conjunto de áreas afectadas por un desastre, para el cual la interacción, centros locales – áreas afectadas representa el segundo escalón, además de una flota de vehículos para el segundo escalón; se pide determinar qué instalaciones habilitar en cada nivel (fase de preparación) y cómo gestionar un adecuado plan de rutas que permitan distribuir los productos humanitarios desde los centros regionales hasta los centros locales y desde estos últimos a las áreas afectadas, administrando adecuadamente el inventario en las instalaciones de primer nivel (fase de respuesta), bajo los objetivos de minimizar los costos privados (localización - inventario - ruteo) y maximizar el bienestar de las regiones afectadas (sufrimiento humano), sintetizados en tres funciones, la primera, relaciona el costo total de las instalaciones habilitadas y el uso de vehículos, la segunda, asocia el costo global por ruteo en cada escalón más la administración del inventario y la tercera función, representa el costo total del sufrimiento humano, causado por la privación en los suministros de socorro y el impacto que genera la estrategia de entrega en las regiones afectadas. Por otro lado, es importante mencionar que los centros regionales designados, deben ubicarse en algún lugar alejado del área crítica o potencial de emergencia y también, a una distancia razonable de los centros locales, pues son estos quienes tienen el contacto directo con los puntos afectados. Asimismo, se debe aclarar que los proveedores mostrados en la Figura 2 se incluyen en la ilustración, simplemente con el propósito de representar el mercado disponible, a partir del cual, las instalaciones de primer nivel obtendrán los productos humanitarios requeridos para atender la demanda durante los periodos de socorro, manteniendo a su vez ciertos niveles de inventario.

Referencias

- [1] Aghajani, Mojtaba, S. Ali Torabi, and Jafar Heydari. "A novel option contract integrated with supplier selection and inventory repositioning for humanitarian relief supply chains." *Socio-Economic Planning Sciences* 71 (2020): 100780.
- [2] Balcik, Burcu, et al. "Coordination in humanitarian relief chains: Practices, challenges and opportunities." *International Journal of production economics* 126.1 (2010): 22-34.
- [3] Cecchini, S., G. Sunkel, and A. Barrantes. "Protección social de la infancia frente a los desastres." *Boletín desafíos* 20 (2017). <https://www.cepal.org/es/enfoques/proteccion-social-la-infancia-frente-desastres>
- [4] L'Hermitte, Cécile, et al. "Developing organisational capabilities to support agility in humanitarian logistics: An exploratory study." *Journal of Humanitarian Logistics and Supply Chain Management* (2016).
- [5] Nagurney, Anna, Mojtaba Salarpour, and Patrizia Daniele. "An integrated financial and logistical game theory model for humanitarian organizations with purchasing costs, multiple freight service providers, and budget, capacity, and demand constraints." *International Journal of Production Economics* 212 (2019): 212-226.
- [6] Rafie-Majd, Zahra, Seyed Hamid Reza Pasandideh, and Bahman Naderi. "Modelling and solving the integrated inventory-location-routing problem in a multi-period and multi-perishable product supply chain with uncertainty: Lagrangian relaxation algorithm." *Computers & chemical engineering* 109 (2018): 9-22.
- [7] Sharif, Mojtaba Talebian, and Majid Salari. "A GRASP algorithm for a humanitarian relief transportation problem." *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 41 (2015): 259-269.

- [8] Vahdani, Behnam, et al. "Two-stage multi-objective location-routing-inventory model for humanitarian logistics network design under uncertainty." *International journal of disaster risk reduction* 27 (2018): 290-306.

Multifractalidad en el mercado de criptomonedas

Autor: Andy Domínguez, Alexander Baracaldo
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: adominguez@utb.edu.co, baracalex@hotmail.com

Resumen: El estudio de la volatilidad de los precios de los activos es una de las áreas de mayor relevancia en el análisis de los mercados financieros. Los métodos clásicos que se han propuesto para caracterizar la volatilidad de las series de precios, y que sentaron las bases de la Teoría de Mercado Eficiente (TME), asume el cumplimiento de ciertas propiedades estocásticas (proceso browniano) sobre los datos de la serie de precio. En esta presentación mostramos cómo dicha propiedades estocásticas no se satisfacen cuando se intenta a caracterizar, a la luz de la TME, la volatilidad de las principales criptomonedas por capitalización del mercado (Bitcoin, Ethereum, Litecoin, entre otras), sino que revelan otras propiedades estocásticas asociadas a la multifractalidad de la serie. Lo anterior sugiere el no cumplimiento de la Teoría de Mercado Eficiente sobre el mercado de criptomonedas, lo cual a su vez direcciona al cumplimiento de las hipótesis de multifractalidad resumidas por Mandelbrot en [1] hacia una caracterización más realista de la volatilidad. Los resultados obtenidos podrían sugerir nuevas formas de valorar el riesgo sobre el diseño de estrategias de inversión y de trading en el mercado de criptomonedas.

Palabras clave: Criptomonedas, Multifractalidad, Mercados financieros

Referencias

- [1] Mandelbrot, Benoit, and Richard L. Hudson. *The Misbehavior of Markets: A fractal view of financial turbulence*. Basic books, 2007.

Estadística y probabilidad

La estadística en el diseño de ensayos clínicos

Autora: Elizabeth Gonzalez Patiño
Instituto Butantan
E-mail: elizabeth.patino@butantan.gov.br

Resumen: La estadística, como disciplina de las ciencias exactas, es una herramienta fundamental para la investigación en todas las áreas del conocimiento. Para la investigación clínica, la estadística se torna fundamental y en el caso de los ensayos clínicos, hace parte de todo el proceso científico de investigación. En este semanario vamos a conversar sobre el papel de la estadística y algunas aplicaciones en las actividades científicas de los estudios del centro de Ensayos clínicos y farmacovigilancia del Instituto Butantan.

Increasing the replicability for linear models via adaptive significance levels

Autor: Daiver de Jesús Velez Ramos
Universidad de Puerto Rico Río Piedras
E-mail: daiver.velez@upr.edu

Abstract: We put forward an adaptive α (Type I Error) that decreases as the information grows, for hypothesis tests in which nested linear models are compared. This calibration may be interpreted as a Bayes-non-Bayes compromise, of a simple translations of a Bayes Factor on frequentist terms that leads to statistical consistency, and most importantly, it is a step towards statistics that promotes replicable scientific findings.

Keywords: Bayes factor, linear model, likelihood ratio, adaptive α , PBIC.

References

- [1] Pérez, María-Eglée, and Luis Raúl Pericchi. "Changing statistical significance with the amount of information: The adaptive α significance level." *Statistics & probability letters* 85 (2014): 20-24.
- [2] Sellke, Thomas, M. J. Bayarri, and James O. Berger. "Calibration of ρ values for testing precise null hypotheses." *The American Statistician* 55.1 (2001): 62-71.

Evolución en el liderazgo político de las mujeres latinoamericanas. Un análisis X-STATIS desde datos CEPAL 2000-2020

Autoras: Edith Johana Medina Hernández, Maria José Fernández Gómez
Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, Universidad de Salamanca,
Salamanca, España
E-mail: ejmedina@unal.edu.co, mjfg@usal.es

Resumen: Durante el siglo XX se produjeron transformaciones en las democracias de diversos países del mundo, que fueron abriendo espacio a la participación de la mujer en la esfera política. En el contexto de las naciones latinoamericanas y del Caribe, a partir de los años 70 comenzaron a emerger liderazgos políticos femeninos que dinamizaron la búsqueda de la igualdad de género en los distintos niveles del poder público. Por ello, resulta pertinente estudiar la evolución en el liderazgo político de las mujeres latinoamericanas, examinando cifras compiladas por el Observatorio de Género de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), según porcentajes de participación en alcaldías, concejos municipales, cortes supremas de justicia y parlamentos.

Al analizar los datos de 19 países de la región, mediante la técnica multivariante Análisis Triádico Parcial o X-STATIS, se observa que Cuba, Bolivia, Nicaragua, México, Costa Rica, Ecuador, Surinam y Jamaica, son los países en los que la mujer ha logrado un mayor posicionamiento en la esfera política, mientras que, aún se perciben oportunidades de igualdad de género en la toma de decisiones políticas en Guatemala, Brasil, Panamá, Colombia y Paraguay.

Palabras clave: Representación política, mujeres latinoamericanas, análisis multivariante, X-STATIS.

Introducción

El liderazgo político de las mujeres latinoamericanas ha comenzado a ser efectivo en los últimos años, desde la implementación de acciones normativas, acuerdos internacionales, estrategias y cuotas de participación, que procuran lograr la igualdad de género en los distintos niveles de poder de los estados de la región. Según como indica (Freidenberg et al. 2018: 535), “en las últimas tres décadas, se implementaron al menos 40 reformas político-electorales en América Latina con el fin de promover la participación activa de las mujeres en las listas de candidaturas para acceder a cargos electivos de los partidos y del Estado”.

Desde diferentes encuentros y mecanismos de seguimiento a estas normas, se ha buscado potenciar la inclusión de las mujeres en organismos decisores a nivel político, en condiciones de igualdad con respecto a los hombres. Sin embargo, cada país ha decidido, de forma diferente, cómo adoptar las medidas necesarias para favorecer el liderazgo de las mujeres, porque, según como especifica (Gigena 2019: 104), “los Mecanismos Nacionales son los responsables, a nivel internacional, de cumplir con los mandatos emanados de la Plataforma de Acción de Beijing, de la Comisión Interamericana de Mujeres de los Estados Americanos (CIMOEA), de la Convención de Belém do Pará, y de otros mecanismos regionales específicos”.

Por tanto, no existe homogeneidad regional en cuanto a la manera en que las mujeres han logrado potenciar su autonomía política, o en la forma en que han logrado ejercer sus candidaturas o cargos en los distintos niveles del poder político. Tal como indica el (DANE 2020: 76), “las cuotas de género, sin duda, han contribuido a romper algunas barreras. Sin embargo, hay que recordar que los obstáculos que enfrentan

las mujeres no son solo de carácter normativo, también se expresan en prácticas y actitudes basadas en estereotipos”.

Teniendo todo esto en cuenta, en este trabajo se pretende identificar las tendencias de indicadores asociados al liderazgo político de las mujeres latinoamericanas en cargos de elección y representación, a nivel local y estatal; esto buscando conocer las fortalezas y las oportunidades de mejora que se advierten entre los países, para continuar favoreciendo la igualdad de género en la toma de decisiones políticas. De forma que los interrogantes que los investigadores de investigación planteados son: ¿ha evolucionado el liderazgo político de las mujeres latinoamericanas en los últimos 20 años?, ¿cuáles son los países que presentan los mejores indicadores de liderazgo político femenino?, y, ¿cuáles registran oportunidades de mejora en cuanto a condiciones de igualdad de género, que favorezcan la presencia de las mujeres en los distintos niveles de poder político?

Metodología

En este estudio se analizan 4 indicadores de liderazgo político de las mujeres latinoamericanas y del caribe: Porcentaje de alcaldesas electas (AL), porcentaje de concejalas electas (CS), proporción de mujeres en las cortes supremas de justicia (PJ) y proporción de mujeres en los parlamentos nacionales (PL). Estos índices, se examinan en 19 países: Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, República Dominicana, Surinam y Uruguay. Examinando quinquenalmente los años entre 2000 y 2020, para cada país y cada indicador, se analiza la estabilidad o el cambio a lo largo de dicho período.

La técnica multivariante utilizada es el análisis es el X-STATIS, que fue propuesto por Jaffrenou (1978) e inicialmente fue llamado Análisis Triádico (Thioulose et al., 1997). Esta metodología permite estudiar un cubo de datos de tres vías (países, indicadores y quinquenios), mediante 3 fases: 1) La Interestructura, 2) El Compromiso y 3) La Intraestructura. Así, lo que se desea representar e interpretar son 5 matrices de datos, cada una de ellas de dimensión 19x4, donde cada quinquenio representa una matriz que en las filas sitúa los 19 países, y en columnas los 4 indicadores.

Resultados y Discusión

En la siguiente figura se ha representado el compromiso de los indicadores junto a la posición media de los países en la estructura que resume de forma global, toda la información que aportan las matrices originales, a lo largo de los 5 periodos analizados. Puede verse cómo los vectores que representan los 4 tipos de poder político analizados, se ubican hacia el lado izquierdo del gráfico. En el cuadrante II y en dirección cercana al eje 2, se observan los vectores AL y PJ, que representan a las alcaldesas y las juezas (altamente relacionados entre sí de forma directa), y muy cercanos a éstos, se sitúan los países: Jamaica, Surinam, Nicaragua y Cuba, reflejando el liderazgo político que han alcanzado sus mujeres en ambas esferas de la representación política.

En el cuadrante III, se posicionan los vectores PL y CS, formando un ángulo muy pequeño entre sí, reflejando una alta asociación directa, y junto a ellos, se observan las posiciones medias de Costa Rica, Bolivia, México, Ecuador y República Dominicana. En este grupo de países, las mujeres latinoamericanas han alcanzado altos niveles en la toma de decisiones políticas, desde cargos parlamentarios y/o puestos en los consejos locales de sus municipalidades. En contraste, los países latinoamericanos que registran los menores porcentajes de representación de las mujeres en los distintos niveles del poder político, son los que se ubican en los cuadrantes I y IV del plano.

Compromiso de variables e Infraestructura de países

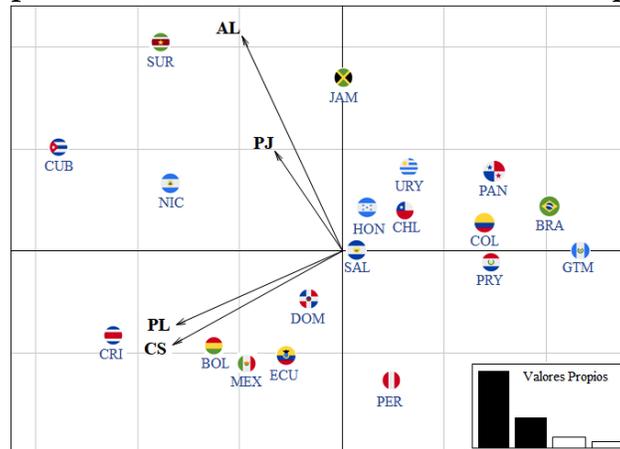


Figure 3: Elaboración propia en R, con librería ade4.

En toda la región latinoamericana, aun se requieren transformaciones sociales, más allá de leyes, reglas o acuerdos que promulguen la igualdad de género en el ámbito del liderazgo político, y acorde con (Freidenberg et al., 2018: 536) es preciso pensar en que, “las reglas electorales por sí solas no garantizan la igualdad de género, sino que éstas se deben complementar con otras políticas en el ámbito económico, cultural y educativo, que contribuyan a superar las diferentes formas de sexismo y violencia (física y simbólica) que enfrentan las mujeres en la política”.

Referencias

- [1] DANE. “Mujeres y hombres: brechas de género en Colombia.” Consejería Presidencial para la equidad de la mujer y ONU Mujeres. Bogotá. Editorial DANE (2020). Recuperado de <https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/genero/publicaciones/mujeres-y-hombre-brechas-de-genero-colombia-resumen-ejecutivo.pdf>
- [2] CEPAL. Observatorio de Igualdad de Género de América Latina y el Caribe. Santiago de Chile (2020).
- [3] Freidenberg, Flavia, et al., eds. *Mujeres en la Política: experiencias nacionales y subnacionales en América Latina*. México: Instituto Electoral de la Ciudad de México, 2018.
- [4] Gigena, Andrea Ivanna. “Mujeres indígenas y representación política: la dimensión simbólica de su presencia en el espacio público.” *Anuario Latinoamericano–Ciencias Políticas y Relaciones Internacionales* 8 (2020): 101-114.
- [5] Jaffrenou, Pierre-Alain. *Sur l’analyse des familles finies de variables vectorielles: bases algébriques et application à la description statistique*. Diss. 1978.
- [6] Thioulouse, Jean, et al. “ADE-4: a multivariate analysis and graphical display software.” *Statistics and computing* 7.1 (1997): 75-83.

Análisis multivariante de los habitantes de calle en Colombia según datos del censo CHC-DANE-2019

Autores: Deivinso Villa Moncaris, Jorge Luis Villalba Acevedo, Julio Seferino Hurtado
Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena, Colombia
E-mail: dvilla@utb.edu.co, jvillalba@utb.edu.co, jhurtado@utb.edu.co

Resumen: El número de personas en condición de calle crece de forma considerable en algunos países del primer y tercer mundo, haciendo de este un fenómeno para tener en cuenta y más en estos tiempos de pandemia. Se investigó de forma multidimensional los factores que inciden en la percepción de seguridad y la vulnerabilidad de los habitantes de calle en Colombia. Trabajamos con los datos del censo de habitantes de calle CHC-2019 los cuales contaban con una población de 13.252 individuos, publicados en 2020 por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), estos se analizaron de forma descriptiva y exploratoria aplicando técnicas multivariantes como: Árboles de Decisión y Análisis de Correspondencias múltiple (MCA) aplicando el uso del software R. Del árbol de decisión se encontró que las variables de percepción de seguridad que explican “teme por su vida”, considerada como la variable respuesta en este árbol, son en orden de importancia: Ha recibido amenazas, ha sido perseguido y ha recibido insultos. Con el Análisis de Correspondencias múltiple (MCA) encontramos asociación entre percepción de seguridad y las variables recibir insultos, amenazas, persecuciones, golpes, abuso policial y realizan trabajo en contra de su voluntad. De forma general se indica que la condición de calle está principalmente ligada al consumo de sustancias psicoactivas, el gusto personal por vivir en la calle y los problemas familiares.

Palabras clave: Colombia, habitantes de calle, árbol de decisión, análisis de correspondencia múltiple, censo.

Referencias

- [1] Johnstone, Melissa, et al. “Enhancing well-being of homeless individuals by building group memberships.” *Journal of Community & Applied Social Psychology* 26.5 (2016): 421-438.
- [2] Nishio, Akihiro, et al. “Causes of homelessness prevalence: R relationship between homelessness and disability.” *Psychiatry and Clinical Neurosciences* 71.3 (2017): 180-188.
- [3] Otálvaro, Andrés Felipe Tirado, and Marta Elena Correa Arango. “Accesibilidad de la población habitante de calle a los programas de promoción y prevención establecidos por la resolución 412 de 2000.” *Investigaciones Andina* 11.18 (2009): 23-35.

Ecuaciones Diferenciales

Estabilidad orbital de ondas estacionarias para la ecuación de Schrödinger con potencial tipo delta de Dirac atractivo y dupla potencia de tipo repulsivo en la no linealidad

Autor: César Adolfo Hernández Melo
Universidade Estadual de Maringá
E-mail: cahmelo@uem.br

Resumen: La ecuación de Schrödinger ha recibido bastante atención de la comunidad matemática en las últimas décadas, cuestiones como la existencia local e global de soluciones así como el estudio de la estabilidad orbital de las llamadas ondas estacionarias ha sido fundamental en el entendimiento de los diversos fenómenos físicos que ella modela. El objetivo principal de esta charla, es presentar algunos resultados recientes sobre la estabilidad orbital de ondas estacionarias para una ecuación de Schrödinger donde el potencial en la ecuación es de tipo delta de Dirac atractivo y la no linealidad es de tipo dupla potencia repulsiva. La prueba del teorema que muestra la existencia y la estabilidad de las ondas estacionarias es basada en la teoría clásica de minimización del funcional Carga-Energía asociado a la ecuación, ver más detalles en [1].

Referencias

- [1] Angulo Pava, Jaime, César A. Hernández Melo, and Ramón G. Plaza. "Orbital stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with attractive delta potential and double power repulsive nonlinearity." *Journal of Mathematical Physics* 60.7 (2019): 071501.

L^p -Maximal regularity for a class of degenerate fractional integro-differential equations in Banach spaces

Authors: Rafael Antonio Aparicio Cuello, Valentin Keyantuo
 University of Puerto Rico, Río Piedras Campus
 E-mail: rafael.aparicio@upr.edu

Abstract: The theory of operator-valued Fourier multipliers is used to establish characterizations for well-posedness for a class of degenerate fractional integro-differential equations of order $0 < \alpha < 1$ (in time) in Banach spaces. We are concerned with the right-sided Liouville fractional derivative on the real axis and the results are obtained for the Lebesgue-Bochner spaces $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p < \infty$ where X is a given Banach space. When X is a UMD space (a property related to the Hilbert transform) and $1 < p < \infty$, we obtain concrete conditions for well-posedness based on the concept of \mathcal{R} -boundedness (or Rademacher boundedness) for operator families. The equations that we consider are used in several models in the applied sciences, for example physics, rheology, and material science, in particular, viscoelasticity.

Keywords: Well-posedness, maximal regularity, degenerate integro-differential equation, operator-valued Fourier multiplier, \mathcal{R} -boundedness, fractional derivative Lebesgue-Bochner spaces.

Introduction

Fractional differential and integro-differential equations are increasingly being studied as models in several areas of applied sciences. In fact, many phenomena find a better description with the use of fractional order models. Such is the case for phenomena with memory effects in visco-elasticity where several monographs have been published in the last decades. We mention [5], [7], [10], [11], [14] among others. Some earlier references such as [12], [13] use the language of integral equations, which is another way to view such equations. Stochastic models based on fractional derivatives are also of widespread use, with applications concrete processes. Some of these are actively used in the area of control theory and fractional calculus of variations.

It is a fact that several concepts of fractional derivatives are available. The most widely used are the Liouville and the Caputo derivatives. Recently, mixed models such as the Hilfer fractional derivative have been introduced (see e.g. [6]). Depending on the problem under consideration, one has to decide which of these fractional derivatives is the most appropriate alternative. Other fractional derivatives have indeed been useful for concrete phenomena. Of course the model used should be tested for its suitability to make predictions on real life problems. One of these is the Weyl fractional derivative which is generally known as the Liouville fractional derivative. Each concept of derivative is usually accompanied with a dual version, generally with the terminology of left-hand and right-hand derivative.

Degenerate equations have been studied with interest due to the many applications in the sciences. The recent monograph by M. Kostić ([8]) is entirely devoted to degenerate Volterra integro-differential equations. Earlier, he treated nondegenerate equations in [9]. The former contains several examples of degenerate differential equations from various areas of science. Other monographs on the subject are Carroll-Showalter [1], Favini-Yagi [3]. Inverse problems for degenerate equations are treated in [4]. An example of a degenerate fractional differential equation is the linearized Benney-Luke equation:

$$(\eta_0 - \Delta)\mathbb{D}_t^\alpha u = \gamma_0 \Delta u - \beta_0 \Delta^2 u. \quad (15)$$

Here, Δ is the Laplace operator, $\eta_0 \in \mathbb{R}$ and $\gamma, \beta_0 > 0$. The equation in the usual case where $\alpha = 1$ has been used as model for problems in the theory of liquid filtration. We refer to [Favini-Yagi-199] and [Kostic 307] for more information. We used the Caputo fractional derivative \mathbb{D}_t^α for the fractional version.

A related equation is the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina equation

$$(\eta\Delta - I)\mathbb{D}_t^\alpha u + \Delta u = 0. \tag{16}$$

The equation is used to study fluid filtration in fissured rocks, moisture transfer in soils and in the process of two-temperature heat conductivity. The fractional version has been presented in [8], where their distributional chaoticity properties are studied.

In the present work, we are concerned with the following problem which consists in a degenerate fractional differential equation in a Banach space:

$$\Lambda D_+^\alpha u(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^t b(t-s)Bu(s)ds + f(t), \tag{17}$$

for almost all $t \in \mathbb{R}$. Here, A, B , and Λ are closed linear operators in a Banach space X satisfying the assumption $D(A) \cap D(B) \subset D(\Lambda)$, f is an X -valued function defined on \mathbb{R} , $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < 1$, and D_+^α is the right-sided Liouville fractional derivative of order α on the real axis. In many situations $A = B$ so that the domain conditions reduces to $D(A) \subset D(\Lambda)$. This becomes in material in case Λ is a bounded linear operator on X . In order to define the derivative D_+^α , we proceed by duality by first considering for smooth complex-valued functions, in this case function from the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ the following:

$$D_-^\gamma \varphi(t) := \frac{-1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^\infty s^{-\gamma} \varphi'(t+s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Then for a vector-valued function u , we define the fractional derivative in the sense of distributions through

$$D_+^\alpha u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} D_-^\alpha \varphi(t)u(t)dt, \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{19}$$

In the case where $u \in S(\mathbb{R}, X)$ the distribution $D_+^\alpha u$ takes the form

$$D_+^\alpha u = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{u(t) - u(t-s)}{(t-s)^{1+\alpha}} ds.$$

The latter form of the fractional derivative is also known in the literature as the Marchaud derivative. It appears in some problems of viscoelasticity (see e.g. [13]).

We establish maximal regularity results for Problem (17) in the Lebesgue-Bochner spaces $L^p(\mathbb{R}, X)$. Our main tool is the theory of operator-valued Fourier multipliers in the Lebesgue-Bochner spaces $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$. In this context, the concept of \mathcal{R} -boundedness plays a fundamental role. This notion reduces to boundedness in case X is isomorphic to a Hilbert space. Problems of this type with the usual derivative have been studied both in the periodic and non periodic contexts by many authors, not only on L^p spaces but also on vector-valued Besov spaces, including the Hölder spaces $C^s(\mathbb{R}, X)$ or $C^s(\mathbb{T}, X)$, $0 < s < 1$, where \mathbb{T} is the one-dimensional torus which can be represented as the quotient space \mathbb{R}/\mathbb{Z} . For the Schrödinger evolution equation, H. Emamirad and A. Rougirel considered a fractional version in [2].

References

- [1] Carroll, Robert Wayne, and Ralph Edwin Showalter. *Singular and degenerate Cauchyproblems*. Academic Press, 1977.
- [2] Emamirad, Hassan, and Arnaud Rougirel. "Time-fractional Schrödinger equation." *Journal of Evolution Equations* 20.1 (2020): 279-293.
- [3] Angelo Favini, Angelo, and Atsushi Yagi. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. CRC Press, 1998.

III Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Fedorov, Vladimir E., Anna V. Nagumanova, and Marko Kostić. "A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations." *Journal of Inverse and Ill-posed Problems* 29.2 (2021): 173-184.
- [5] Gorenflo, Rudolf, et al. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Vol. 2. Berlin: Springer, 2014.
- [6] Hilfer, Rudolf. "Fractional time evolution." *Applications of fractional calculus in physics* (2000): 87-130.
- [7] Kilbas, Anatoliĭ Aleksandrovich, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Vol. 204. elsevier, 2006.
- [8] Marko Kostić. *Abstract Volterra integro-differential equations*. CRC Press, 2015.
- [9] Kostić, Marko. "Abstract degenerate Volterra integro-differential equations: inverse generator problem." *arXiv preprint arXiv:1912.11536* (2019).
- [10] Mainardi, Francesco. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010.
- [11] Podlubny, Igor. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [12] Prüss, Jan. *Evolutionary integral equations and applications*. Vol. 87. Birkhäuser, 2013.
- [13] Renardy, Michael, William J. Hrusa, and John A. Nohel. "Mathematical problems in viscoelasticity." *New York* (1987).
- [14] Samko, Stefan G. "Fractional integrals and derivatives, theory and applications." *Minsk; Nauka I Tekhnika* (1987).

Lie symmetry method applied to the equation of the orbit in Schwarzschild spacetime

Author: Danilo Andrés García Hernández
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
E-mail: d190684@dac.unicamp.br

Abstract: We investigate the equation for the orbit of a test particle in the Schwarzschild spacetime by using classical Lie symmetry group analysis.

Keywords: Lie point symmetries, invariant solutions, Noether symmetry, Schwarzschild spacetime.

Introduction

Lie symmetry analysis applied to differential equations was introduced by Sophus Lie in the 19th century, who studied the invariance of ordinary differential equations (ODE) under group transformation. Lie symmetry analysis method is a powerful tool to study differential equations, such as ordinary differential equations, Partial differential equations, recently this method has been extended to study other types of equations like fractional differential equations and stochastic differential equations. Using this method we can find related group of transformation, reduction of order, invariant solutions, exact solutions, similarity solutions and Conservation Laws both in the Noether point of view of and the Ibragimov one.

In this work, that was carried out together with Luis Acedo, Enrique López and Abraham J. Arenas, we shall study a equivalent form of the differential equation for a test particle geodesic orbit in Schwarzschild spacetime.

References

- [1] Olver, Peter J. *Applications of Lie groups to differential equations*. Vol. 107. Springer Science & Business Media, 2000.
- [2] Bluman, George W., and Sukeyuki Kumei. *Symmetries and differential equations*. Vol. 81. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Noether, E. "Invariante Variationsprobleme. Nachrichten der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-Physikalische Klasse 2, 235–257." *Transport Theory and Statistical Physics* (1918): 183-207.
- [4] Ibragimov, Nail H. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*. Vol. 3. CRC press, 1995.
- [5] Lie, Sophus. "Theorie der Transformationsgruppen I." *Mathematische Annalen* 16.4 (1880): 441-528.
- [6] Chandrasekhar, Subrahmanyan, and Kip S. Thorne. *The mathematical theory of black holes*. (1985): 1013-1015.
- [7] Hobson, Michael Paul, George P. Efstathiou, and Anthony N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] Danby, John. *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond: Willman-Bell (1992).

La ecuación diferencial exacta generalizada

Autor: Luciano Miguel Lugo Motta
Universidad Nacional del Nordeste
E-mail: lmlmb@yahoo.com.ar

Resumen: En este trabajo presentamos y realizamos un estudio de la Ecuación Diferencial Generalizada

$$P(x, y)d_Fx + Q(x, y)d_Fy = 0, \quad (20)$$

y estudiamos bajo qué condiciones es exacta y presentamos la formulación general, bajo la cual, en caso negativo puede ser reducida a ella.

Palabras clave: Derivada e Integral Generalizada, Ecuación Exacta, Factor Integrante

Introducción

Una de las áreas de la Matemática en constante desarrollo y crecimiento es el de las Ecuaciones Diferenciales y sus métodos de resolución usando operadores fraccionarios o generalizados y diversos espacios funcionales. El Cálculo Fraccionario y el Cálculo Generalizado son hoy en día tan importantes como el mismo Cálculo Clásico, en los últimos 40 años muchos matemáticos se interesaron en estos temas por sus muchas aplicaciones, como así también la posibilidad de definir nuevos operadores diferenciales e integrales.

Esta ecuación está definida en el marco de la Derivada Generalizada de [9] y su operador integral generalizado, definido en [8] y que engloba tanto las derivadas conformes de [2] como las no conformes de [1] y [7]. Para el desarrollo de nuestro trabajo, definimos las derivadas parciales generalizadas y entonces decimos que la ecuación (20) es N-exacta si y sólo si existe una función ϕ tal que $N_{F_1}^\alpha \phi = P(t_1, t_2)$ y $N_{F_2}^\alpha \phi = Q(t_1, t_2)$. Se demuestra además que

Teorema 39. *En las condiciones anteriores sobre P y Q la ecuación es N-exacta si y sólo si*

$$N_{F_1}^\alpha Q = N_{F_2}^\alpha P.$$

Por último, para obtener la solución general de la ecuación (20), definimos y establecemos algunas propiedades de la diferencial total generalizada de una función.

Referencias

- [1] Guzman, Paulo M., G. Langton, L. M. Lugo, J. Medina, J. J. E. Nápoles. "A new definition of a fractional derivative of local type." *J. Math. Anal.* 9.2 (2018): 88-98.
- [2] Khalil, Roshdi, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh. "A new definition of fractional derivative." *Journal of computational and applied mathematics* 264 (2014): 65-70.
- [3] Valdés, Juan E. Nápoles. "El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Consideraciones (auto) críticas." *Boletín de matemáticas* 5.1 (1998): 53-79.
- [4] Valdes, Juan E. Nápoles. "Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales." *Lecturas matemáticas* 25.1 (2004): 59-111.

- [5] Valdes, Juan E. Nápoles. "Las ecuaciones diferenciales ordinarias como signos de los tiempos."
- [6] Valdes, Juan E. Nápoles. "Ecuaciones Diferenciales y contemporaneidad." *Revista Brasileira de História da Matemática* 7.14 (2007): 213-232.
- [7] Valdes, Juan E. Nápoles, Paulo M. Guzmán, and Luciano M. Lugo. "Some new results on nonconformable fractional calculus." *Advances in Dynamical Systems and Applications* 13.2 (2018): 167-175.
- [8] Guzman, P. M., Lugo, L. M., Nápoles Valdés, J. E., & Vivas-Cortez, M. "On a new generalized integral operator and certain operating properties." *Axioms* 9.2 (2020): 69.
- [9] Valdés, J. N., Guzmán, P. M., Lugo, L. M., & Kashuri, A. "The local non-conformable derivative and Mittag-Leffler function." *Sigma J. Eng. Nat. Sci.* 38.2 (2020): 1007-1017.

Un problema de temperatura y el método de capa límite

Autor: Ruben Dario Ortiz Ortiz
Universidad de Cartagena
E-mail: rortizo@unicartagena.edu.co

Resumen: Se estudia la variación de temperatura en un fluido con velocidad uniforme entre dos planos paralelos ubicados a una distancia constante que contiene cierta capa límite. Tomamos la región fuera de la capa límite considerándola en una dimensión. Luego de esto, se trabaja el interior de la capa límite usando cierta transformación y un método llamado combinación de variables y surge en el término principal de la expansión, luego de esto aplicamos las condiciones de contorno para encontrar la solución aproximada de la temperatura.

Palabras clave: Capa limite, Python, diferencias finitas, expansion interna, expansion externa, planos paralelos, condicion de pegamento de Prandtl, solucion asintotica

Introducción

Ahora consideraremos la capa limite termica que ocurre en un flujo de fluido. Se analiza la temperatura de un fluido cerca de una pared solidad donde la temperatura sera obtenida de una ecuacion diferencial que sera resuelta por el metodo de expansiones asintoticas acopladas con alunas condiciones de frontera. En Ortiz et al. (2014) fue tratado el fluido de Couette y en Ortiz et al. (2019) fue considerado el fluido de Poiseuille. En ambos se trabajo con capa limite.

Referencias

- [1] Diaz-Salgado, Alexander, Marin-Ramirez, A. M., & Ortiz-Ortiz, R. D. "The fluid of Couette and the boundary layer." *International Journal of Mathematical Analysis* 8.52 (2014): 2561-2565.
- [2] E. Mercado, A.M. Marin and R.D. Ortiz. "Asymptotic Solution for a Temperature Problem with the Fluid of Poiseuille into the Navier-Stokes Equations Applying the Boundary Layer Method". *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 14 (2019): 8812-8816.

Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden no lineales

Autor: Julio Castro Garcés
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: jcastro@utb.edu.co

Resumen: Presentaremos un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales de la forma $f(x, y, y', y'') = 0$. En este método utilizamos criterios de homogeneidad, los cuales asignan exponentes a cada una de las variables x, y, y', y'' . Después de esto, se toma el grado de cada término desde el punto de vista algebraico. Si el grado es el mismo, hacemos ciertos cambios de variable que convierten la ecuación diferencial original en una de segundo orden con una variable ausente. Este tipo de ecuaciones se pueden resolver de forma más simple.

Palabras clave: EDP no lineales, criterios de homogeneidad.

Educación Matemática

Estudio longitudinal de tendencia acerca de la complejidad del enunciado y el desempeño de alumnado de nivel secundario con problemas verbales de comparación multiplicativa

Autor: Maria T. Sanz, Emilia López-Iñesta, Daniel Garcia, Francisco Grimaldo

Universidad de Valencia

E-mail: m.teresa.sanz@uv.es, emilia.lopez@uv.es; daniel.garcia@uv.es, francisco.grimaldo@uv.es

Resumen: El objetivo de este estudio es analizar la complejidad del enunciado y el desempeño del estudiantado al resolver problemas verbales de comparación multiplicativa en diferentes edades, pero dentro de un mismo nivel educativo, nivel secundario. Para tal fin, se escoge una muestra de 210 estudiantes, distribuidos en los tres últimos cursos de la educación secundaria de un centro educativo público español. Los problemas incorporan unas características determinadas, el cálculo de la parte de un todo, dónde éste puede ser un número natural o fraccionario. Los resultados muestran que la complejidad del enunciado y el desempeño del estudiantado tienen una relación inversa. Así mismo, se determina que el desempeño del estudiantado en la resolución de los problemas propuestos crece con la edad; sin embargo, las diferencias al respecto de la complejidad no son tan significativas. Estos datos sugieren que la complejidad del enunciado puede ser un predictor del desempeño en la resolución de problemas verbales, y que el concepto matemático de fracción de un número, natural o fraccionario, no se consolida hasta último curso de educación secundaria (15 a 16 años de edad).

Palabras clave: Habilidad lectora, desempeño del estudiantado, estudio longitudinal, problemas verbales, resolución de problemas

Introducción

Son muchos los estudios que han generado diferentes clasificaciones al respecto de los problemas verbales (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Greer, 1992; Nesher, 1992; Vergnaud, 1990; 1997). Así se tienen dos aproximaciones según la operación a realizar, es decir, de estructura aditiva o multiplicativa. La probabilidad de éxito que se puede obtener al respecto de la resolución de un problema, es decir, el número resolutores que han realizado correctamente un problema entre todos los resolutores que han tratado de resolverlo, es una marca de dificultad (Ivars y Fernández, 2016) y por tanto, determina la dificultad o complejidad para comprender los conceptos que involucra un problema y, en particular, las diferentes situaciones multiplicativas (Clark y Kamii, 1996; García, Vázquez y Zarzosa, 2013; Mulligan y Mitchelmore, 1992, 1997; Peled y Nesher, 1988). En el campo de la matemática educativa, en particular, en la investigación en resolución de problemas, existe una relación entre los conceptos matemáticos y los procesos de comprensión del enunciado verbal (De Corte y Verschaffel, 1991; Hegarty, Mayer y Monk, 1995). En particular, Sanz et al. (2020) determinaron que la comprensión de un enunciado, medida a través del tiempo promedio de lectura por palabra del enunciado, estaba ligada a la dificultad de conceptos como la comprensión de un todo natural o fraccionario (Perera Dzul y Valdemors Álvarez, 2009) y la fracción como operador (Hart, 1984).

Propósito de la Investigación

En el marco en el que se encuentra la presente investigación se tiene como objetivo,

1. Determinar la evolución del nivel de éxito, y la complejidad del enunciado para estudiantado con edades comprendidas entre 14 y 16 años ante un problema de comparación multiplicativa cuando el todo sobre el que se actúa es natural o fraccionario.
2. Determinar la relación existente entre el nivel de éxito y la complejidad del enunciado, siendo el primero medido a través de la probabilidad de éxito (Ivars y Fernández, 2016) y la segunda como el tiempo de lectura medio por palabra empleado por el estudiantado al leer el enunciado de un problema verbal (Sanz et al., 2020).

Metodología

Muestra

Con el fin de obtener respuesta a los objetivos planteados se presenta un estudio descriptivo cuantitativo formado por 210 participantes (126 mujeres) pertenecientes a tres cursos de nivel secundario del sistema educativo español: a) de 13 a 14 años, 35 alumnas y 42 alumnos; b) de 14 a 15 años, 27 alumnas y 34 alumnos; y c) de 15 a 16 años, 72 estudiantes (28 alumnas). Para cada una de las tres poblaciones objeto de estudio se determina que los datos son comparables al respecto de las posibles diferencias de género. Se puede afirmar que no existen diferencias significativas, ya que las pruebas para la diferencia de medianas al respecto de la habilidad lectora, así como las pruebas para la diferencia de proporciones en el caso de la probabilidad de éxito, reflejan p-valores menores al nivel de significación del 5 % establecido, en todos los casos. Además, se determina, haciendo uso de las mismas pruebas, que no existen diferencias significativas de tiempo de lectura por cursos, entre los que resuelven con éxito y los que no. Notar que, se realizan pruebas no paramétricas en el presente estudio ya que no se cumplen las hipótesis de aplicabilidad de pruebas paramétricas (p-valores < 0.0001).

Instrumento

Para la obtención del tiempo de lectura empleado en cada proposición se hará uso de un entorno tecnológico, R&L, utilizado para investigaciones sobre lectura, comprensión de textos y resolución de tareas asociadas a textos. R&L es un sistema basado en tecnología web, al que se puede acceder desde móviles, ordenadores y pantallas inteligentes empleando un navegador cualquiera y disponible para todos los sistemas operativos. De entre las diferentes opciones que nos proporciona la herramienta se hace imprescindible, en el presente trabajo, el cubrimiento de partes del texto y las respuestas de opción múltiple (ver Figura 4). El cubrimiento de partes del texto (incluidas las respuestas de opción múltiple) hace que estas permanezcan ocultas (Figura 4) y que sólo puedan hacerse visibles al presionar sobre ellas. Esto permite obtener un registro de las interacciones que hace el usuario. Así, el equipo investigador puede conocer qué parte del texto estaba siendo consultada en la realización de las tareas, en qué momento de la lectura se ha leído un segmento determinado del texto, cuánto tiempo ha permanecido en él, si se ha realizado una lectura en más de una ocasión y si se ha seguido un orden lógico de la lectura del texto, las preguntas y las opciones de respuesta, etc.

Se utilizan dos problemas de comparación multiplicativa de una etapa (Nesher, 1992), siendo los utilizados en Sanz et al. (2020) quienes realizaron el estudio para alumnado con edades entre 15 y 16 años de edad. En ambos problemas se analizan conceptos matemáticos como, la fracción como operador, y su acción sobre un todo natural o fraccionario.

- T1. Tengo media pizza, si dos tercios son de barbacoa ¿qué porción de pizza es de barbacoa?
- T2. Tenemos 30 caramelos, si dos tercios son de fresa ¿cuántos caramelos son de fresa?

Las diferentes proposiciones se remarcan por distintos subrayados: a) azul, tiene un todo fraccionario (T1) o natural (T2); b) naranja, se presenta la fracción como operador (T1 y T2); y d) verde, pregunta del problema (P1 y P2).

Medida de Complejidad

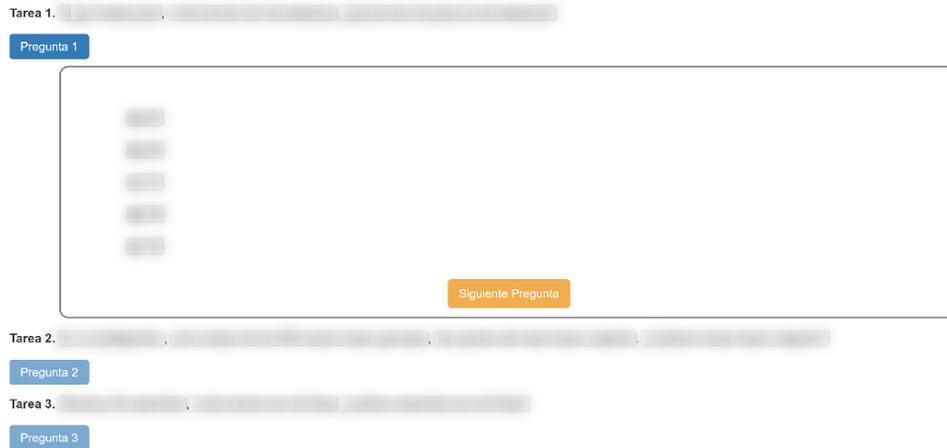
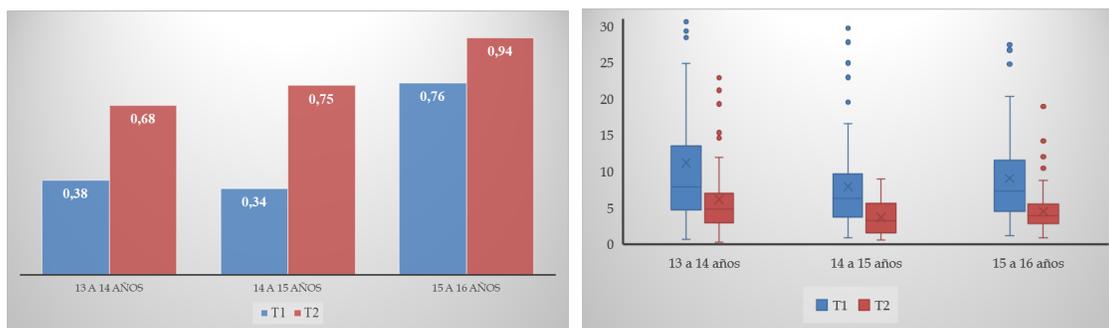


Figura 4: Ejemplo de un experimento en R&L donde se utiliza el enmascaramiento y las respuestas de opción múltiple

Siguiendo a Sanz et al. (2020), La complejidad de un problema verbal se puede derivar de la complejidad de todas las proposiciones que forman su enunciado. Para estimar la complejidad de una proposición, calculamos el tiempo de lectura por palabra empleado por los usuarios. El tiempo de lectura de la proposición j en la tarea i (T_{ij}) comprende, por tanto, el conjunto de cocientes del tiempo empleado por cada estudiante en el grupo (de tamaño n) entre el número de palabras en la proposición. La complejidad global del enunciado será medida como el tiempo de lectura por palabra promedio de las proposiciones que conforman el enunciado.

Resultados y Discusión

En primer lugar, se determina que las distribuciones del rendimiento del alumnado y profesorado, medidas a través de la tasa de acierto al resolver los problemas, son las mismas (Figura 5a). Así, si se determinase la complejidad de un problema verbal a partir de la probabilidad de éxito, se podría decir que, $P(\text{éxito } T1) < P(\text{éxito } T2)$, lo que determinaría que el problema 1 sería más complejo que el 2.



(a) Éxito de resolución, probabilidad de acierto (b) Complejidad del enunciado, tiempo medio por palabra por población de estudio

Figura 5: Resultados del enunciado global por tipo de participante

Al evaluar el tiempo por palabra medio empleado al leer los enunciados de los problemas (Figura 5b), se observa que las distribuciones coinciden en ambas poblaciones y, además, los resultados concuerdan con

las probabilidades de éxito (Figura 5a), pero de forma inversa, es decir, a más tasa de acierto, menos tiempo empleado en dicho problema. Estos resultados, determinan que, si autores como Ivars y Fernández (2016) concluyen que la tasa de acierto puede medir la complejidad de un problema, entonces el tiempo de lectura puede ser un buen pronóstico, y la relación entre ambas medidas es inversa. Así, quedaría determinado el Objetivo 2. Al respecto de la estructura de ambos problemas, es decir, problemas de comparación multiplicativa, la Figura 5 va en contra de lo que autores como Neshet (1992) o Ivars y Fernández (2016) determinan, se trata de problemas cuya estructura queda consolidada en último curso de educación primaria. En nuestro estudio, se observa que esto no se produce, y no es hasta el último curso de la educación secundaria cuando se produce la consolidación (Objetivo 1), lo que lleva a pensar, que el concepto que emerge del sintagma “dos tercios son de”, así como el uso de las fracciones, es lo que provoca la diferencia entre estudios anteriores y el presente. La demostración de lo mencionado se observa en la Figura 6 en la que se pone de manifiesto la complejidad de las diferentes proposiciones medidas a través del tiempo de lectura medio por palabra.

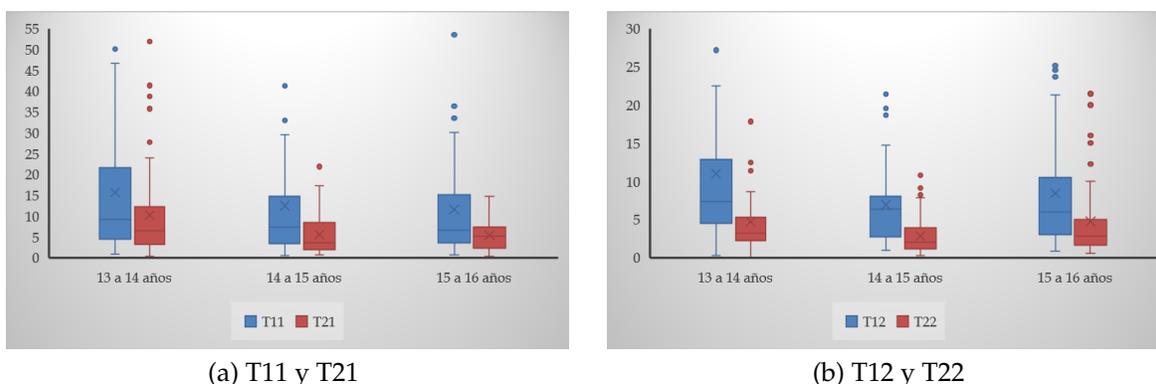


Figura 6: Resultados de la complejidad del enunciado por proposiciones

La Figura 6a muestra que el todo fraccionario (T11) es más costoso de leer que el todo natural (T21), resultados que están en la línea de lo que Perera Dzul y Valdemors Álvarez (2009) manifiestan en su trabajo. Al respecto de la parte de un todo, la Figura 6b vuelve a ser la muestra de que es más costosa la lectura cuando se hace sobre una fracción (T12) que sobre un número natural (T22). Este resultado vuelve a estar acorde con lo que la fracción como operador de Hart (1984). Este sintagma está relacionado con “parte de”, y se traslada de forma algorítmica a una multiplicación de dos fracciones (T1) o de una fracción y un natural (T2). Este resultado confirma los obtenidos por Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006), quienes postularon que, cuando se introduce el algoritmo, incluso en situaciones en las que el alumnado ya posee destreza (la parte de un todo natural se introduce en alumnado de 9 a 10 años de edad en el sistema educativo español), tras la introducción del algoritmo (en este caso la multiplicación de fracción por natural) se observa una tendencia a dejar de utilizarlas para aplicar el algoritmo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con la ayuda de los proyectos de investigación RTI2018-095820-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), EDU2017-84377-R e innovación de códigos UV-SFPIE.PID19-109833 y UV-SFPIE.PID20-1350001

Referencias

- [1] Carpenter, Thomas P., James M. Moser, and Thomas A. Romberg, eds. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Routledge, 2020.

- [2] Clark, Faye B., and Constance Kamii. "Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5." *Journal for Research in Mathematics Education* 27.1 (1996): 41-51.
- [3] De Corte, Erik, and Lieven Verschaffel. "Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems." (1991): 117-130.
- [4] García Alcalá, Alejandra, Jonathan Vázquez Maldonado, and Luis Zarzosa Escobedo. "Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación: El caso de la multiplicación y la división." *Educación matemática* 25.3 (2013): 103-128.
- [5] Greer, Brian. "Multiplication and division as models of situations." (1992).
- [6] Hart, K. M. *Ratio: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* (1984).
- [7] Hegarty, Mary, Richard E. Mayer, and Christopher A. Monk. "Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers." *Journal of educational psychology* 87.1 (1995): 18.
- [8] Ivars, Pere, and Ceneida Fernández. "Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años." *Educación matemática* 28.1 (2016): 9-38.
- [9] Mulligan, Joanne. "Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study." *Mathematics Education Research Journal* 4.1 (1992): 24-41.
- [10] Mulligan, Joanne T., and Michael C. Mitchelmore. "Young children's intuitive models of multiplication and division." *Journal for research in Mathematics Education* 28.3 (1997): 309-330.
- [11] Nesher, Pearla. "Solving multiplication word problems." *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* Routledge, 2020. 189-219.
- [12] Peled, Irit, and Pearla Nesher. "What children tell us about multiplication word problems." *The Journal of Mathematical Behavior* 7.3 (1988): 239-262.
- [13] Perera Dzul, Paula B., and Marta E. Valdemoros Álvarez. "Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado." *Educación matemática* 21.1 (2009): 29-61.
- [14] Vergnaud, Gérard. "La teoría de los campos conceptuales." *Recherches en didactique des mathématiques* 10.2 (1990): 133-170.
- [15] Vergnaud, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad.* (1997).
- [16] Verschaffel, Lieven, Brian Greer, and Joke Torbeyns. "Numerical thinking." *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Brill Sense, 2006. 51-82.

Relación entre el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento de los temas y el conocimiento de la estructura de las Matemáticas: caso de dos profesores de Matemáticas uno de Colombia y otro de México

Autores: Ever Pacheco, Oscar Paternina, Estela Juárez-Ruiz, Eric Flores-Medrano, Diana Zakaryan
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
E-mail: everjpacheco@alumno.buap.mx, oscar.paternina@alumno.buap.mx

Resumen: El problema de la presente investigación radicó en la necesidad de caracterizar el conocimiento especializado que evidencian dos profesores de matemáticas en la enseñanza de la simetría y localización en el plano cartesiano y profundizar en las relaciones entre los subdominios del modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK). La investigación se sustenta en el Modelo MTSK y tiene como objetivo establecer y analizar las relaciones entre los subdominios del modelo para la enseñanza de la simetría y localización en el plano cartesiano. Asimismo, se partió de lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia y la Secretaría de Educación Pública de México, en relación con el pensamiento espacial y geométrico. La metodología fue de tipo cualitativa con un estudio de caso múltiple de carácter instrumental, con dos informantes, un profesor de México y otro de Colombia con una amplia experiencia docente y formación en matemáticas y su didáctica. La información se ha recolectado por medio del diseño de una planeación de clase, una entrevista semiestructurada y un cuestionario previamente diseñado y validado por expertos a dos profesores de matemáticas de secundaria del estudio. Entre los resultados se destacan las relaciones entre los subdominios de interés profundizando en relaciones específicas entre éstos a través del análisis de sus categorías, y cómo estas conexiones propician decisiones en el quehacer docente en el aula de matemática.

Palabras clave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas, simetrías, localización en el plano cartesiano.

Introducción

Caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemática ha sido un reto y foco de estudio para la Educación Matemática, es aquí donde se logra evidenciar una tensión acerca de la naturaleza del conocimiento que maneja el profesor tanto en el conocimiento matemático como el didáctico y, sobre todo, el grado que tiene para desarrollar su tarea docente. En este sentido, [4] en el informe presentado en la Organización para la Educación, la Ciencia y la Cultura de las Naciones Unidas, (UNESCO), se sugiere asegurar al profesorado el derecho a una formación continua relevante y pertinente, centrada en la formación integral y los aprendizajes de los estudiantes; asegurar impactos significativos de la formación continua en las prácticas de enseñanza y en los aprendizajes de los estudiantes. Por tal motivo, el conocimiento del profesor de matemática debe ir en evolución constante, sin embargo, aún se conserva en las algunas instituciones profesores de matemática con una enseñanza tradicional. Algunos estudios [3] muestran que debido a la división que suele suceder entre el conocimiento científico y el conocimiento didáctico, hay instituciones educativas en las que se ha llegado a aceptar, explícitamente, que basta con saber matemáticas para enseñar en aula de clase. Asimismo, evidencian la existencia de profesores de ciencias que, aunque con un adecuado

dominio del contenido matemático, carecen de una formación didáctica sólida. En efecto, la carencia de alguno de estos dos dominios en la enseñanza de las matemáticas genera en la práctica docente un ambiente no agradable y por ende pone en juicio el conocimiento especializado del profesor.

En este sentido, el objetivo de la presente investigación está encaminado a establecer y analizar las relaciones entre el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento de los temas y el conocimiento de la estructura de las matemáticas para la enseñanza de la simetría y localización en el plano cartesiano. Dichos subdominios a estudiar hacen parte del modelo MTSK, [1].

El estudio del conocimiento del profesor sobre el conocimiento didáctico del contenido es de suma importancia para los procesos de enseñanza y aprendizaje propios del quehacer docente, el cual le permite al profesor identificar el interés, las fortalezas y sobre todo las dificultades que presentan los estudiantes al momento de interactuar con el objeto matemático. Asimismo, el conocimiento del currículo académico y el uso de las teorías tanto institucionales como personales, permiten al profesor tener una visión amplia de su práctica docente. Por otro lado, el conocimiento de los temas y el conocimiento de la estructura de las matemáticas, posibilitan al profesor tener una visión amplia acerca de los contenidos a enseñar y permite hacer una planeación de clase teniendo en cuenta, la forma, el orden, la conexión y secuencias que debe tener el tema a enseñar. En concordancia con esto, [2] plantea que el profesor debe conocer los contenidos que enseña a sus estudiantes, en donde se han cuestionado sobre qué y cómo requiere conocerlos, lo cual implica un conocimiento profundo del contenido matemático (conceptos, procedimientos, hechos, reglas y teoremas) y sus significados. Mientras que el subdominio de la estructura de las matemáticas describe el conocimiento del profesor acerca de las conexiones entre elementos matemáticos.

Dada la importancia de este estudio, cabe mencionar que son escasas las investigaciones de cómo se relacionan estos subdominios en particular y qué evidencia un profesor de matemática en su práctica docente, aunque existen investigaciones en donde se han relacionado otros subdominios del modelo MTSK, un ejemplo de esas relaciones lo presenta [5] identificando las relaciones entre (el conocimiento de la enseñanzas de las matemáticas) y los demás subdominios del conocimiento del profesor de matemáticas). Asimismo, [6] estudió las relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, se requieren más investigaciones en donde se establezcan las relaciones entre los subdominios del modelo MTSK en pos de enriquecer aún más la práctica docente en el aula y aportar herramientas necesarias al conocimiento profesional del profesor de matemática.

Referencias

- [1] Carrillo, José, et al. "Determining specialised knowledge for mathematics teaching." *Proceedings of the CERME*. Vol. 8. 2013.
- [2] Carrillo-Yañez, José, et al. "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model." *Research in Mathematics Education* 20.3 (2018): 236-253.
- [3] Fonseca, Jennifer, and Mario Castillo. "Formación de docentes de matemática: aspectos relevantes." *Uniciencia* 27.1 (2013): 2-14.
- [4] Körner, Anton. *Informe Regional de Monitoreo del Progreso hacia una Educación de Calidad para Todos en América Latina y el Caribe: EPT 2012*. UNESCO, 2012.
- [5] Zakaryan, Diana, et al. "Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria." *Enseñanza de las Ciencias* 36.2 (2018): 0105-123.
- [6] Zakaryan, Diana, and Miguel Ribeiro. "Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones." *Zetetike* 24.3 (2016): 301-321.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para el uso efectivo de las TIC en la enseñanza

Autores: Iván Andrés Padilla Escorcía, Jenny Patricia Acevedo Rincón
Universidad del Norte
E-mail: iapadilla@uninorte.edu.co, pjacevedo@uninorte.edu.co

Resumen: La integración de la tecnología en las prácticas docentes es al día de hoy una realidad. Innumerables esfuerzos han realizado los profesores de matemáticas por hacer uso de estas herramientas en la enseñanza. Sin embargo, en muchos casos, la no profesionalización como licenciados en matemáticas, ha generado que no cuenten con estrategias didácticas o pedagógicas que les hagan valer de manera efectiva estas herramientas. Así, este trabajo de investigación tuvo como objetivo caracterizar el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas efectivamente mediante las TIC. Para esto, esta investigación se desarrolló mediante un enfoque cualitativo con diseño estudio de caso instrumental en la que se siguieron las siguientes fases de investigación: elección del participante, diseño y aplicación de las técnicas e instrumentos y análisis y recolección de la información. En ese orden se efectuaron 13 unidades de observación no participante a un profesor de matemáticas con experiencia enseñando en el grado décimo en la modalidad remota y presencial, enfocadas en el análisis de los subdominios de conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) del modelo que estudia al conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Se encontró como principal hallazgo las relaciones existentes entre subdominios disciplinares y de tipo didáctico-pedagógico del modelo MTSK, lo que muestra la necesidad de que el profesor conozca a profundidad de estos subdominios de conocimiento en los contenidos que enseña (funciones trigonométricas y secciones cónicas) para poder hacer efectiva el uso de la tecnología como mediación en la enseñanza. A manera de conclusión se obtuvo que es relevante la exploración continua del conocimiento especializado del profesor en diversos contenidos de las matemáticas que son enseñados utilizando las Tecnología.

Palabras clave: Modelo MTSK, tecnología, profesores de matemáticas

Introducción

Las últimas convocatorias a nivel nacional correspondientes al concurso de mérito docente muestran que cualquier profesional con conocimiento a fin a las matemáticas puede presentarse (MEN, 2002). En la convocatoria realizada para las zonas afectadas por el conflicto armado, se muestra que profesionales de la matemática, física, estadística, ingeniería, administración, de empresas, entre otros, podían acceder a estas plazas (MEN, 2017). En ese orden, y visto que en el país los resultados en pruebas estandarizadas como PISA, revelan que de los países pertenecientes a la OCDE, Colombia es el más rezagado con 40% de los estudiantes en niveles bajos (OCDE, 2019), muestra la necesidad de que sean los profesores con formación en matemática, didáctica y pedagogía quienes sean los encargados de estar en las aulas de clase y puedan aplicar con eficacia tendencias del siglo XXI de acuerdo con la UNESCO (2017) como es el caso de la tecnología. De esta manera, Carrillo et al., (2018) proponen el modelo de conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas, con sus siglas en inglés MTSK, cuya característica radica en comprender los elementos que necesita el profesor para anticiparse a los pensamientos del estudiante, así como las oportunidades de aprendizaje surgidas a través de las actividades matemáticas que desarrollan los estudiantes (Sosa, Flores-Medrano & Carrillo, 2015). El modelo MTSK tiene forma de hexágono y está constituido por dos dominios y seis subdominios de conocimiento. Como se muestra en la figura 7.

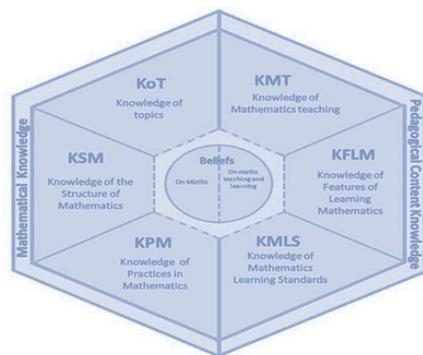


Figura 7: Modelo del conocimiento del profesor. Fuente. Carrillo et al. (2018)

En la parte izquierda del modelo se ubica el conocimiento matemático (Mathematical Knowledge-MK), el cual corresponde a una red de conocimiento estructurado basado en reglas y conexiones que permiten comprender la creación de las matemáticas (Carrillo et al., 2018), este está conformado por 3 subdominios de conocimiento: el conocimiento de los temas (Knowledge of Topics-KoT); el conocimiento de la estructura matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM); y, el conocimiento de las prácticas matemática (Knowledge of Practices in Mathematics-KPM). En el lado derecho del modelo se ubica el conocimiento pedagógico de los contenidos (Pedagogical Content Knowledge-PCK), el cual corresponde a las diferentes maneras de profundizar el contenido matemático cuando se tienen intenciones de enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila & Carrillo, 2020). Este dominio también está conformado por tres subdominios: el conocimiento de las características de aprendizaje (Knowledge of Features in Learning Mathematics -KFLM), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching-KMT); y, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards-KMLS). Para términos de esta investigación se profundiza en dos subdominios del MK (conocimiento de los temas y de las prácticas matemáticas) y uno del PCK (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas). Estos se definen a continuación: i) conocimiento de los temas: corresponde a los componentes específicos del área de las matemáticas que está determinado por los saberes con los que debe contar un profesor para enseñar matemáticas. Como por ejemplo: procedimientos, definiciones, y fundamentaciones teóricas de los contenidos a estudiar (Flores-Medrano et al., 2014); ii) conocimiento de las prácticas matemáticas: corresponde al conocimiento del profesor para demostrar, justificar, validar, hacer deducciones e inducciones y generar conocimiento en matemáticas, es decir su significado puro; iii) conocimiento de la enseñanza de las matemáticas: corresponde al conocimiento del profesor sobre teorías de la enseñanza de las matemáticas que son derivadas de investigaciones en el área o de observaciones y reflexiones de las actividades de matemáticas que desarrolla el profesor en el aula, además, del conocimiento de los beneficios que ofrece la inserción de materiales concretos o tecnológicos como instrumento en la enseñanza (Delgado & Zakaryan, 2019).

Referencias

- [1] Carrillo-Yáñez, José, et al. "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model." *Research in Mathematics Education* 20.3 (2018): 236-253.
- [2] Ávila, Dinazar Isabel Escudero, y José Carrillo Yáñez. "El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas." *Educación matemática* 32.2 (2020): 8-38.
- [3] Delgado-Rebolledo, Rosa, and Diana Zakaryan. "Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer." *International Journal of Science and Mathematics Education* 18.3 (2020): 567-587.

III Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Flores-Medrano, Eric, et al. "Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK." *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (2014): 57-72.
- [5] MEN. (2002). "Decreto 1278". Bogotá: MEN
- [6] MEN. (2017). Decreto N° 1578 de 2017. Bogotá: MEN
- [7] Sosa, Leticia, Eric Flores-Medrano, and José Carrillo. "Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato." *Enseñanza de las Ciencias* 33.2 (2015): 173-189.
- [8] Talis, O. E. C. D. "Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners." (2019).
- [9] UNESCO. "E2030: Educación y Habilidades para el Siglo XXI" (2017). Santiago de Chile. UNESCO.

El pensamiento Visual: un sistema de actividades en la enseñanza aprendizaje de las nociones geométricas en niños con TDAH de grado quinto de la básica primaria

Autores: Osvaldo Jesús Rojas Velásquez, Randy Zabaleta Mesino
Universidad Antonio Nariño
E-mails: orojasv69@uan.edu.co, rzabaleta10@uan.edu.co

Resumen: En la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el grado quinto de básica primaria se destacan ciertas dificultades: una limitada base conceptual; el nuevo contenido matemático no se introduce a partir de los conocimientos existentes y situaciones contextualizadas en las experiencias de la vida; y carencia de las habilidades de representación, visualización e imaginación necesarias. Para contribuir a mejorar esta situación en el salón de clases, se considera oportuno crear las bases para un desarrollo adecuado del pensamiento visual en los estudiantes y de esta forma se potencia un conocimiento robusto de los contenidos matemáticos en la Educación primaria. En esta investigación se describe el proceso de enseñanza-aprendizaje de las nociones geométricas en niños de grado quinto de básica primaria con diagnóstico TDAH a través de un sistema de actividades que estimulan el pensamiento visual con el uso de material concreto manipulable y la mediación tecnológica. Se darán los fundamentos teóricos, descripción del sistema de actividades y finalmente la simulación tecnológica de las actividades que favorecen el aprendizaje de las nociones desarrolladas producto de los hallazgos en la conclusión del trabajo.

Palabras clave: Pensamiento Visual, TDAH, Nociones Geométricas, enseñanza- aprendizaje.

Introducción

Los niños con necesidades especiales educativa (NEE) demandan una atención diferenciada en nuestro ejercicio como docente, de ahí se han identificado un número importante de aportes para intervenir y acompañar los procesos de enseñanza-aprendizaje de estudiante que presentan trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH). El desarrollo del pensamiento visual permite conectar el conocimiento matemático a través de una comprensión concreta de los objetos matemáticos a estudiar en su nivel de escolaridad, es importante destacar los siguientes aportes alrededor del fortalecimiento del pensamiento visual o lo que algunos autores describen como visualización matemática:

Díaz y Dircio (2010) presentan una propuesta metodológica para medir el grado de visualización en actividades de resolución de problemas matemáticos. Esta propuesta se sustenta en la fuerza del pensamiento visual, que intervienen en todo tipo de actividad matemática y plantean que "... el pensamiento visual puede convertirse en pensamiento abstracto, es decir también puede ser medio para la construcción de conocimiento". Objetivo hacia el cual se enfoca este proyecto de investigación.

Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) plantean "... que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas". También hacen referencia a la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología, y plantean que "... la visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto.

Fatemah Almuwaiziri (2020), describió la visualización recibida pasivamente (PRV), que se refiere a imágenes dadas o representaciones visuales de ideas matemáticas encontradas en problemas verbales (por ejemplo, tres grupos de cinco manzanas) y visualización autoconstruida (SCV), que se refiere a imágenes o representaciones visuales de ideas matemáticas relacionadas con problemas verbales que los estudiantes

tienen que idear ellos mismos, facilitan y normalizan la comprensión y la resolución de problemas verbales con un efecto favorable para niños con TDAH, estudio que se realizó en Kuwait.

Britt, Alicia K.(2014), describe el efecto de la estimulación visual mediada por el uso de materiales manipulables en el aula permiten beneficiar el aprendizaje de los estudiantes de segundo grado de primaria con TDAH.

Eric Carbone (2001), propone que es importante distribuir adecuadamente el aula de clase para generar una adaptación sensorial de ojos y oídos, pero que a su vez es necesario alinear estrategias de visualización en la construcción de tareas a los estudiantes con TDAH que ilustre de mejor manera el problema a desarrollar, sin profundizar en los estudiantes las dificultades en la atención y en la organización de sus actividades.

Referencias

- [1] Arcavi, Abraham. "The role of visual representations in the learning of mathematics." *Educational studies in mathematics* 52.3 (2003): 215-241.
- [2] Campistrous, Luis, and Celia Rizo. "Aprende a resolver problemas aritméticos." *Editorial Pueblo y Educación. La Habana* (1996).
- [3] Díaz, Miguel, and Luis Gilberto Dircio. "El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual." (2010): 337-344.
- [4] Zimmermann, Walter, and Steve Cunningham, eds. *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America, 1991.
- [5] Rodriguez, M. P. "Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos."(2012): 115-152.
- [6] Giaquinto, Marcus, and Mariano Giaquinta. *Visual thinking in mathematics*. Oxford University Press, 2007.
- [7] Di Domenicantonio, Rossana, Viviana Costa, and María Vacchino. "La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral." *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 27 (2011): 75-87.
- [8] Díaz, Miguel, and Luis Gilberto Dircio. "El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual." (2010): 337-344.
- [9] Almuwaiziri, Fatemah. *Solving mathematical word problems using Passively Received Visualisation (PRV) and Self-constructed Visualisation (SCV): the case of primary school students with Attention Deficit Hyperactivity Disorder (ADHD) in Kuwait*. Diss. University of Reading, 2020.
- [10] Carbone, Eric. "Arranging the classroom with an eye (and ear) to students with ADHD." *Teaching Exceptional Children* 34.2 (2001): 72-82.
- [11] Gropper, Rachel J., and Rosemary Tannock. "A pilot study of working memory and academic achievement in college students with ADHD." *Journal of Attention Disorders* 12.6 (2009): 574-581.
- [12] Britt, Alicia K. *The effects of visual stimulation on the mathematics performance of children in second grade with Attention Deficit Hyperactivity Disorder (ADHD)*. Diss. 2014.

Minicursos

Una breve introducción a los modelos de Ecuaciones Diferenciales aplicados a enfermedades infecciosas

Autor: Marlon Michael López Flores
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
E-mail: marlon.mlopezf@gmail.com

Resumen: Los modelos de ecuaciones diferenciales son utilizadas comumente por los gobiernos para preever el curso de una enfermedad infecciosa, como Covid-19. Éstos sirven como herramienta de apoyo para tomar decisiones en posibles intervenciones. En éste mini curso serán presentados los modelos más basicos utilizados para representar este tipo de enfermedades, así como un modelo para representar el desarrollo de Covid-19

Tópicos en Geometría de los números

Autor: Raibel de Jesus Arias Cantillo
Universidad Federal de Maranhão
E-mail: raibel.jac@ufma.br

Resumen: El objetivo de este mini-curso será presentar algunas conexiones entre geometría y teoría de los números. Específicamente, usaremos nociones básicas de la geometría de Poincaré para estudiar resultados de Teoría de los números. Por ejemplo, estudiaremos los llamados ternos pitagóricos, el algoritmo Euclidiano de la división y las fracciones continuadas desde un punto de vista geométrico, usando herramientas de la geometría de Poincaré. La finalidad es introducir y motivar, sin exigir muchos prerrequisitos, a estudiantes de inicio de carrera de ciencias básicas y Ingeniería al estudio de la geometría de Poincaré, usando como puente la Teoría de los números, mostrando conexiones interesantes entre estas dos áreas de la matemática que, a priori, parecen desconectadas.

Referencias

- [1] Bonahon, Francis. *Low-dimensional geometry: From Euclidean surfaces to hyperbolic knots*. Vol. 49. American Mathematical Soc., 2009.
- [2] Calegari, Danny. *Continued Fractals*. Public Lecture at Swinburne, August 18, 2005.
- [3] Conway, John H., and Richard Guy. *The book of numbers*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [4] Conway, Jonh. *The Sensual quadratic form*. New York, the mathematical association of America, 1997.
- [5] Ford, Lester R. "Fractions." *The American Mathematical Monthly* 45.9 (1938): 586-601.
- [6] Hardy, Godfrey Harold, and Edward Maitland Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press, 1979.
- [7] Khinchin, A. Ya. *Continued Fractions*. The University of Chicago Press, 1964.
- [8] Scharlau, Winfried, and Hans Opolka. *From Fermat to Minkowski: lectures on the theory of numbers and its historical development*. Springer Science & Business Media, 2013.

GeoGebra en el aula

Autores: Alexander Arévalo Soto, Diana H. Bueno-Carreño, Leonel Monroy Guzmán, Oswaldo Rodríguez Díaz

Institución Universitaria Antonio José Camacho, Pontificia Universidad Javeriana Cali, Universidad del Valle, Universidad Autónoma de Occidente

E-mails: aarevalo@admon.uniajc.edu.co, dhbueno@javerianacali.edu.co, leonel.monroy@correounivalle.edu.co, orodriguez@uao.edu.co

Abstract: En este curso se presentará la oferta que provee GeoGebra para potenciar la dinámica de las clases, desde lo que ofrece como parte de la mochila digital hasta aplicaciones y experiencias concretas en temas relacionados con álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y matemáticas discretas.

Keywords: Mochila digital, GeoGebra, Aula.

Introducción

En las últimas cuatro décadas la tecnología ha transformado drásticamente gran parte de las dinámicas de la sociedad y las propias habilidades humanas (Tall, 2013). La enseñanza de las matemáticas, aunque no al mismo ritmo, no ha sido la excepción. Se ha venido experimentando una revolución de las estrategias didácticas que acercan con mayor notoriedad la ciencia y los estudiantes a las TIC, lo que ha conllevado a tomar conciencia de que “Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente” (De Guzmán, 2007).

En este curso se presentará la oferta que provee GeoGebra para potenciar la dinámica de las clases, desde lo que ofrece como parte de la mochila digital hasta aplicaciones y experiencias concretas en temas relacionados con álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y matemáticas discretas. De este modo, el curso constará de cuatro módulos, a saber:

Mochila digital. Examinaremos las diferentes herramientas y aplicaciones que brinda GeoGebra, útiles para la planeación de ambientes académicos de aprendizaje, enmarcados en el desarrollo de una nueva alfabetización digital, enfocada tanto para estudiantes como para profesores (Trigo & Machin, 2018).

Matemáticas discretas. Exploraremos algunos recursos que permiten la experimentación, modelización y verificación de soluciones a problemas propios de las matemáticas discretas en temas como conteo, lógica y teoría de grafos.

Álgebra lineal. A través de un ejemplo de enseñanza mediada por tecnologías digitales Tipo CAS y DGS, en esta sección del curso recrearemos la “nueva realidad” de los objetos matemáticos y su emergencia en el aula gracias a la interacción natural de la geometría y el álgebra que ofrecen estas herramientas (Moreno-Armella & Hegedus, 2013).

Ecuaciones diferenciales. Usando las herramientas que brinda GeoGebra (CAS, deslizadores, etc.) se mostrará cómo se puede hacer la simulación de modelos matemáticos que se representan con problemas de valor inicial. Veremos cómo las diferentes vistas permiten hacer inferencias, tendencias o comportamientos de las soluciones de problemas en contextos realistas.

Es importante resaltar que para participar del curso basta con tener un manejo básico de GeoGebra.

Referencias

- [1] De Guzmán, Miguel. "Enseñanza de las ciencias y la matemática." *Revista iberoamericana de educación* 43 (2007): 19-58.
- [2] Moreno-Armella, Luis, and Stephen Hegedus. "From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives." *The SimCalc vision and contributions*. Springer, Dordrecht, 2013. 27-45.
- [3] Trigo, Manuel Santos, and Matías Camacho Machín. "La resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnología digital en el diseño de libros interactivos." *Educatio Siglo XXI* 36.3 Nov-Feb1 (2018): 21-40..
- [4] Tall, David. "The evolution of technology and the mathematics of change and variation: Using human perceptions and emotions to make sense of powerful ideas." *The SimCalc Vision and Contributions*. Springer, Dordrecht, 2013. 449-461.

Matemática y programación con Python

Autor: Moisés Ramón Quintana Alvarez
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: mquintana@utb.edu.co

Resumen: El desarrollo tecnológico moderno, la dependencia creciente en las investigaciones en la mayoría de las esferas de la vida social de los modelos matemáticos, el perfeccionamiento y uso de la inteligencia artificial, el vertiginoso desarrollo de la ciencia de los datos y su vinculación con la IA, hacen que un profesional o un científico de hoy no puede vivir ajeno a la informática y sobre todo a la programación de computadores. Motivar a los matemáticos en esta dirección, es el principal objetivo de este minicurso.

Modern technological development, the growing dependence on research in most spheres of social life on mathematical models, the refinement and use of artificial intelligence, the rapid development of data science and its link to AI, make a professional or a scientist of today can not live outside of computing and especially computer programming. Motivating mathematicians in this direction is the main objective of this mini-course.

Palabras clave: Matemática, Programación, Python, Métodos numéricos, Metaheurísticas

Introducción

Por todos es conocido que las matemáticas se nutren de la emoción de comprender cómo y por qué se relacionan las cosas y que la programación, de lo que puede lograrse al dominar con profundidad esas relaciones. Los algoritmos que usa la programación han derivado de diversas ramas de las matemáticas, por lo que un matemático que incursiona en la programación ya tendría una ventaja inicial. La matemática computacional es la disciplina que modeliza y resuelve los problemas que surgen en los ámbitos científico, tecnológico e industrial. Utiliza modelos matemáticos, metaheurísticas y estadísticos desarrollados sobre la base de la computación. Cada vez está más presente e impacta en los sistemas informáticos. Si se agrega que los primeros informáticos fueron matemáticos que quisieron automatizar ciertos procesos de cálculo y dieron surgimiento a los ordenadores y a la informática en sí, entonces ¿Por qué no motivar a los matemáticos actuales fortalecer su conocimiento sobre programación en un lenguaje de alto nivel como Python?

Es cierto que la elección de Python hace posible esta síntesis a priori: gracias a su sintaxis de programación multiparadigma, escribir programas en Python es a la vez potente y asequible. Es probable que cubra la mayoría de las áreas de programación y, en particular, aquellas que pueden ser de interés para los algoritmos y sobre todo, existe una comunidad multidisciplinar trabajando en la construcción de bibliotecas en todas las áreas del saber para facilitar el trabajo de programadores y científicos. Desde este punto de vista, aprender un lenguaje “fundamental” como Python nos parece una alternativa didáctica mucho mejor a la que consistiría en aprender solo el uso de software de álgebra informática.

Desarrollo

Tratar de aprender en un espacio de tiempo tan corto un lenguaje de programación es imposible. El objetivo del curso no es convertir en especialistas en su uso a los participantes de un momento a otro. Se trata de motivar a que profundicen en su aprendizaje, dominio y posterior aplicación aprovechando las ventajas que poseen por su formación académica.

Las cuatro horas del curso se dedican a introducir las características y elementos del lenguaje de programación Python, sus tipos de datos y operadores, las estructuras básicas de programación y su relación con determinadas estructuras algebraicas, algunas características avanzadas del lenguaje y sobre todo aplicaciones en la matemática discreta y numérica, así como procesos importantes de optimización.

Referencias

- [1] Casamayou-Boucau, Alexandre. "Programmation en Python pour les mathématiques." (2011).
- [2] Kong, Q., T. Siau, and A. M. Bayen. "Python Programming and Numerical Methods. A Guide for Engineers and Scientists." (2021).
- [3] Bahit, Eugenia. "Curso PYTHON para principiantes." (2012).

Dynamics and Geometry Dinâmica e Geometria

Author: Ronaldo Alves Garcia
Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
E-mail: ragarcia@ufg.br

Abstract: In this minicourse (delivered in portuguese) it will be considered geometric problems in the Euclidean plane. It will be considered planar convex curves and elliptic billiards.

Keywords: four vertices, ellipse, curvature, elliptic billiard, Poncelet theorem.

Introduction

The main topics are the following:

- i) plane convex curves,
- ii) curvature of plane curves (Euclidean and affine),
- ii) Four (and six) vertex theorem.
- iv) elliptic billiards,
- v) Poncelet theorem,
- vi) other topics of dynamics.

References

- [1] Garcia, R. "Dinâmica e Geometria, II Colóquio de Matemática da Região Nordeste." (2012).
- [2] M. J. Dias Carneiro e R. Garcia, O teorema dos quatro vértices e a sua recíproca. 32^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2019.
- [3] R. Garcia e D. Reznik, Discovering Euclidean Phenomena in Poncelet Families, 33^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2021.

Descubriendo Asteroides

Yaleidys Hernandez, Raquel Rey, Angelica Tuñon, Clara Camargo, Daniel
Herrera

Grupo de Astronomía Alfa Centauri - Universidad Tecnológica de Bolívar

E-mail: alphacentauriutb@gmail.com

Resumen: El Espacio es tan fascinante como su gran inmensidad. Dentro de él se encuentran muchos cuerpos celestes y formas de energía que desde la Tierra pueden resultar en hermosas vistas, fascinantes colores y formas impredecibles. Los asteroides, incluidos en esta inmensidad de cuerpos, son pequeños objetos rocosos que orbitan alrededor del sol. La mayoría de ellos orbitan entre Marte y Júpiter. Estudiar los asteroides nos permite profundizar sobre el origen del sistema solar, ya que los materiales que lo conforman no han sido alterados por procesos de integración como sucede con los planetas, donde los materiales con menos densidad están fuera y los que poseen más densidad están en el centro. No obstante, pese a sus potencialidades, los asteroides pueden suponer un peligro para nuestro planeta si impactan con él dado que estos cuerpos se desplazan a grandes velocidades. Es por esto que la Comunidad Internacional está muy interesada en estudiarlos y catalogarlos. En ese sentido, este minicurso comprende una visión general e introductoria a los cuerpos pequeños del sistema solar, haciendo énfasis en los asteroides. Se entenderá el por qué de la importancia de descubrir sus órbitas, cómo son nombrados a la hora de ser descubiertos y se conocerá acerca de la IASC, de qué se trata el proyecto de ciencia ciudadana llamado Campaña Internacional de Búsqueda de Asteroides, donde estudiantes, aficionados y público en general pueden participar y realizar sus propios descubrimientos.

Referencias

- [1] Space Nasa: What is an asteroid?. Retrieved August 27, 2021, from <https://spaceplace.nasa.gov/asteroid/sp/>

La Teoría APOE y la construcción de pensamiento matemático

Autor: Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander
E-mail: sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen: La Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) explica la construcción de conocimiento matemático a través de un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo debe desarrollar para comprender un concepto, noción o teorema matemático. En este documento se estudian los constructos de dicha teoría, las componentes de su método y el rol de la descomposición genética en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; a través del análisis de tres descomposiciones genéticas (modelos cognitivos considerados el corazón de la teoría) relacionados con el concepto de transformación lineal, valores y vectores propios y, un teorema de álgebra lineal.

